Problemas de matemáticas especiales

María E. Ballvé
Antonio F. Costa
José L. de María
Ernesto Martínez
Paloma Pantoja
Teresa Ulecia

1972 XX UNED 1992

Cuadernos de la uned

C.U.
080

PROBLEMAS

DE

MATEMATICAS ESPECIALES

(Curso de Acceso)

MARÍA E. BALLVÉ
ANTONIO F. COSTA
JOSÉ L. DE MARÍA
ERNESTO MARTÍNEZ
PALOMA PANTOJA
TERESA ULECIA

Depósito legal: M. 21.936-1992
ISBN: 84-362-2473-6

Primera edición, noviembre 1989
1.ª reimpresión, junio 1992

Imprime:
Impresos y Revistas, S. A. (IMPRESA)
Herreros, 42. Políg. Ind. Los Angeles
GETAFE (Madrid)

INDICE

La experiencia docente en Matemáticas demuestra que la existencia de colecciones de ejercicios y problemas mejora considerablemente el entendimiento de las materias, ya que, por una parte, facilita el afianzamiento y la comprensión del alumno, y por otra, el profesor tiene un punto de referencia y de orientación para sus discentes.

Un libro de problemas de Matemáticas Especiales para el Curso de Acceso para mayores de 25 años se enfrenta a varios retos. En primer lugar, debe situar a los alumnos en una posición adecuada para comenzar los estudios universitarios, unificando los conocimientos del heterogéneo alumnado de esta asignatura. En segundo, debe motivar al alumno, tanto para que trabaje por sí mismo como para que tome contacto con la belleza del contenido de la Matemática; y todo ello en una forma condensada, ya que mientras en el Bachillerato se tiene suficiente tiempo para lograr estos fines, aquí debe conseguirse en un solo curso.

Los autores hemos tenido presente que el libro no va dirigido solamente a futuros alumnos de Ciencias, sino también de Económicas, Empresariales e Ingeniería Industrial. Por tanto hemos buscado puntos comunes y le hemos dado un carácter marcadamente práctico. También hemos sido conscientes de que, para la mayoría de los alumnos, la sensación inicial al entrar en contacto con las materias de las que trata el curso es la desorientación, por ello —en la medida de lo posible— los problemas se han desarrollado gradualmente dentro de cada capítulo, desde el ejercicio inmediato al problema de contenido más teórico, rozando en algún momento el nivel de un primer curso de Licenciatura. En algunos casos los problemas se han escrito exhaustivamente, teniendo *presente que muchos alumnos deben desarrollar su trabajo de forma totalmente individual.*

Globalmente los problemas se podrían clasificar en tres grupos:

- *Teoría de Conjuntos y fundamentos.*
- *Estructuras Algebraicas y Algebra Lineal.*
- *Análisis.*

No obstante, no debe olvidarse que el objetivo principal es la obtención de un conocimiento sintético de la iniciación a la Matemática, sin el cual podría perder su sentido de estudio y reducirse a la mera aplicación de recetas. *Hemos pretendido evitar este peligro y procurado también que el tratamiento de los problemas sea* ameno, *dentro de los márgenes que permite el rigor matemático.*

Confiamos haber conseguido todos estos fines.

LOS AUTORES

1. CONJUNTOS. RELACIONES

1.1. *Dado un conjunto no vacío A definimos el conjunto de las partes de A $\mathscr{P}(A)$ como el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.*

Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e\}$, hallar $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

Solución

Según la definición, $\mathscr{P}(A)$ y $\mathscr{P}(B)$ son respectivamente:

$$\mathscr{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, A\}$$

$$\mathscr{P}(B) = \{\phi, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{d, e\}, B\}.$$

Por tanto, $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ es el conjunto:

$$\{\phi, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}\}.$$

1.2 *En una clase de 30 alumnos, 21 están matriculados en Inglés, 18 en Matemáticas y 9 en Historia. Hay 12 alumnos matriculados en Inglés y en Matemáticas, 5 en Inglés y en Historia y 3 en Matemáticas y en Historia. Ningún alumno está matriculado en las tres asignaturas.*

a) *¿Cuántos alumnos no están matriculados en Inglés ni en Historia?*

b) *¿Cuántos alumnos están matriculados en una sola asignatura? (especificar los de cada asignatura).*

c) *¿Hay alumnos en esa clase no matriculados en ninguna de esas asignaturas?*

Solución

a) El número de alumnos de Inglés o de Historia será la suma de los alumnos matriculados en esas asignaturas menos el número de alumnos matriculados en ambas a la vez, ya que éstos están contados dos veces. Es decir,

$$21 + 9 - 5 = 25.$$

Por tanto, el número de alumnos no matriculados en ninguna de esas dos asignaturas será:

$$30 - 25 = 5.$$

b) El número de alumnos matriculados exclusivamente en una sola asignatura se obtiene restando del total de matriculados en esa asignatura los que también lo estén en otras. Así pues,

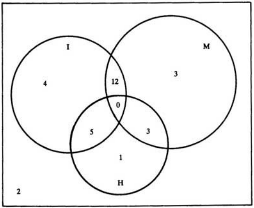
- Matriculados sólo en Inglés: $21 - (12 + 5) = 4$.
- Matriculados sólo en Matemáticas: $18 - (12 + 3) = 3$.
- Matriculados sólo en Historia: $9 - (5 + 3) = 1$.

c) Como no hay ningún alumno en las tres asignaturas a la vez, el total de alumnos matriculados en una o dos asignaturas será la suma de los que están sólo en una asignatura más los que están en dos, es decir,

$$4 + 3 + 1 + 12 + 5 + 3 = 28.$$

Por tanto hay 2 alumnos en esa clase que no están matriculados en ninguna de esas tres asignaturas.

Podemos ilustrar estos resultados mediante el siguiente diagrama



1.3. *Consideremos los siguientes subconjuntos de* $\mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^*$

$$A = \{n \in \mathbb{N}^*,\ n < 25\}$$

$$B = (\dot{7}) \quad \textit{(conjunto de los múltiplos de 7)}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N}^*,\ n \text{ es par y } n^2 > 100\}$$

$$D = \{n \in \mathbb{N}^*,\ n \text{ es primo y } n < 40\}$$

Hallar las intersecciones de cada dos de dichos conjuntos; las intersecciones de cada tres y la intersección de los cuatro.

Solución

$A \cap B = \{7, 14, 21\}$ (múltiplos de 7 menores que 25)

$A \cap C = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$ (números pares menores que 25 cuyo cuadrado es mayor que 100).

$A \cap D = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ (números primos menores que 25)

$B \cap C = \{14\}$ (múltiplos de 14)

$B \cap D = \{7\}$ (único múltiplo de 7 primo)

$C \cap D = \phi$

$A \cap B \cap C = \{14\}$

$A \cap B \cap D = \{7\}$

$A \cap C \cap D = \phi$

$B \cap C \cap D = \phi$

$A \cap B \cap C \cap D = \phi.$

1.4. *Sean dos subconjuntos A y B de un conjunto E. Se define la diferencia $A - B$ como el conjunto de elementos de A que no pertenecen a B.*

a) Demostrar que $A - B = A \cap B'$.

b) Hallar $A - (B \cup C)$ y $A - (B \cap C)$.

Solución

a) Sea $x \in A - B$. Por definición $x \in A$ y $x \notin B$, entonces $x \in B'$ y por tanto $x \in A \cap B'$.

Análogamente, si $x \in A \cap B'$ se deduce que $x \in A$ y $x \in B'$ es decir $x \in A$ y $x \notin B$, por definición de diferencia de conjuntos obtenemos que $x \in A - B$.

b) $A-(B\cup C) \overset{\text{por el apartado}}{\underset{\text{anterior}}{=\!=}} A\cap(B\cup C)' \overset{\text{leyes de}}{\underset{\text{Morgan}}{=\!=}} A\cap(B'\cap C')=$

$\overset{\text{propiedad}}{\underset{\text{asociativa}}{=\!=}} (A\cap B')\cap C' = (A-B)\cap C' = (A-B)-C.$

$$A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=$$

$$=A\cap(B'\cup C') \overset{\text{propiedad}}{\underset{\text{distributiva}}{=\!=}} (A\cap B')\cup(A\cap C')=$$

$$=(A-B)\cup(A-C).$$

1.5. *Sean E un conjunto y A un subconjunto suyo, designamos por A' el complementario de A en E, es decir A' = E − A.*

Simplificar las siguientes expresiones:

a) $((A\cap B)\cap C)\cup((A\cap B)\cap C')\cup(A'\cap B).$

b) $(A\cap(B\cap C')')\cup((A'\cup B')\cup C)'.$

Solución

a) $((A\cap B)\cap C)\cup((A\cap B)\cap C')\cup(A'\cap B) \overset{\text{propiedad}}{\underset{\text{asociativa}}{=\!=}}$

$=[((A\cap B)\cap C)\cup((A\cap B)\cap C')]\cup(A'\cap B)=$

$\overset{\text{propiedad}}{\underset{\text{distributiva}}{=\!=}} ((A\cap B)\cap(C\cup C'))\cup(A'\cap B)=$

$=(A\cap B)\cup(A'\cap B) \overset{\text{propiedad}}{\underset{\text{distributiva}}{=\!=}} (A\cup A')\cap B = E\cap B = B.$

b) El segundo paréntesis, por las leyes de Morgan, es igual a

$$(A'\cup B')'\cap C'$$

que a su vez es igual, por las mismas leyes, a

$$(A \cap B) \cap C' = A \cap (B \cap C').$$

Podemos escribir por tanto

$$(A \cap (B \cap C')') \cup (A \cap (B \cap C')) \underset{\text{distributiva}}{\overset{\text{propiedad}}{=\!=}}$$

$$= A \cap [(B \cap C')' \cup (B \cap C)] = A \cap E = A.$$

1.6. *Estudiar si son ciertas las siguientes igualdades:*

a) $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

b) $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

c) $\mathscr{P}(A - B) = \mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)$.

donde A y B son subconjuntos de un conjunto E.

Solución

a) Sea X un subconjunto cualquiera de $A \cap B$. Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, entonces $X \subset A$ y $X \subset B$ y, por tanto, $X \in \mathscr{P}(A)$ y $X \in \mathscr{P}(B)$. Tenemos pues,

$$\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B).$$

Sea $X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$, X es un subconjunto de A y también lo es de B, por tanto $X \subset A \cap B$ y $X \in \mathscr{P}(A \cap B)$. Entonces,

$$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cap B).$$

La primera igualdad es cierta.

b) Sea $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$, $X \subset A \cup B$. No se puede deducir de aquí que $X \subset A$ ó $X \subset B$ ya que, en general, no es cierto.

Por ejemplo, sean

$A = \{\text{números naturales pares}\}$,

$B = \{\text{números naturales impares}\}$ y

$X = \{1, 2\}$.

$X \subset A \cup B$ pero $X \not\subset A$ ni $X \not\subset B$.

Por tanto, en general, $\mathscr{P}(A \cup B) \not\subset \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

Sea $X \in \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$, $X \in \mathscr{P}(A)$ ó $X \in \mathscr{P}(B)$. En cualquiera de los dos casos $X \subset A \cup B$ ya que $A, B \subset A \cup B$. Entonces $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$. Por tanto,

$$\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B).$$

c) Sea $X \in \mathscr{P}(A - B)$, $X \subset A - B$ es decir, $X \subset A$ y $X \cap B = \phi$. Entonces $X \in \mathscr{P}(A)$ y $X \notin \mathscr{P}(B)$, así pues $X \in \mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)$ por lo que

$$\mathscr{P}(A - B) \subset \mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B).$$

Sea $X \in \mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)$, obtenemos que $X \in \mathscr{P}(A)$ y $X \notin \mathscr{P}(B)$. No podemos deducir de aquí que $X \cap B = \phi$. Por ejemplo, sean

$$A = \mathbb{Z}, \quad B = \mathbb{N} \quad \text{y} \quad X = \{-3, 1\}.$$

Es claro que

$$X \subset \mathbb{Z}, \quad X \not\subset \mathbb{N} \quad \text{y} \quad X \cap \mathbb{N} = \{1\} \neq \phi.$$

Así pues la otra inclusión no es cierta en general.

1.7. *Sea E un conjunto no vacío. En $\mathscr{P}(E)$ definimos la siguiente operación entre subconjuntos, llamada diferencia simétrica:*

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) \qquad A, B \in \mathscr{P}(E).$$

Demostrar las siguientes igualdades:

a) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

b) $A \triangle B = B \triangle A$.

c) $A \triangle A = \phi$.

d) $A \triangle B = B \Leftrightarrow A = \phi$.

e) $A \triangle E = A'$.

f) $A \triangle B = A \triangle C \Leftrightarrow B = C$.

Solución

a) Recordemos que la diferencia entre dos conjuntos A y B puede escribirse también como $A \cap B'$.

Tenemos $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A \cap B)' \underset{\text{de Morgan}}{\overset{\text{leyes}}{=\!=}} (A \cup B) \cap$

$\cap (A' \cup B') \underset{\text{distributiva}}{\overset{\text{propiedad}}{=\!=}} (A \cap A') \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup$

$\cup (B \cap B') = (A - B) \cup (B - A)$.

b) Es consecuencia de la propiedad conmutativa para la unión y la intersección.

c) Como $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$ tenemos $A \triangle A = A - A = \phi$.

d) Si $A = \phi$ entonces $A \cap B = \phi$, $B = B - \phi = B$. Supongamos ahora que $A \triangle B = B$. Esto implica que $(A - B) \cup (B - A) = B$ y por tanto $A - B \subset B$ lo que sólo es posible si $A = \phi$.

e) $A \triangle E = (A \cup E) - (A \cap E) = E - A = A'$.

f) Si $B = C$ la igualdad es obvia. Supongamos entonces $B \neq C$. Esto implica que existe, al menos, un elemento $x \in B$ tal que $x \notin C$ o viceversa. Supongamos lo primero. Este elemento $x \in B$ puede pertenecer o no a A.

- Si $x \in A$ tenemos $x \notin A \triangle B$ ya que $x \in A \cup B$ y $x \in A \cap B$. Además, $x \in A \triangle C$ ya que $x \in A \cup C$ pero $x \notin A \cap C$ (al no pertenecer a C). Por tanto, $A \triangle B \neq A \triangle C$.

- Si $x \notin A$ se tiene que $x \in A \triangle B$ ya que $x \in B$ y, por tanto, a $A \cup B$ pero $x \notin A \cap B$. Además, $x \notin A \triangle C$ ya que $x \notin A \cup C$ por no pertenecer ni a A ni a C. Nuevamente se obtiene $A \triangle B \neq A \triangle C$.

1.8. *Sea X un conjunto no vacío. Demostrar que $X \times Y = X \times Z$ implica que $Y = Z$.*

Solución

Sea y un elemento cualquiera de Y. Como $X \neq \phi$ existe $x \in X$. Consideremos el par $(x, y) \in X \times Y = X \times Z$. Por tanto, $(x, y) \in X \times Z$ y de aquí $y \in Z$. Obtenemos $Y \subset Z$.

Repitiendo el razonamiento para un $z \in Z$ cualquiera, obtenemos $Z \subset Y$ y de ambas inclusiones la igualdad buscada.

1.9. *En el conjunto* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ *consideremos la relación*

$$\mathscr{R} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}.$$

Estudiar qué propiedades verifica.

Solución

— $\mathscr{R}$ no es reflexiva ya que los pares $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4) \notin \mathscr{R}$

— $\mathscr{R}$ es simétrica ya que para todo x tal que $x\mathscr{R}y$ se tiene $y\mathscr{R}x$:

$$2\mathscr{R}3 \Rightarrow 3\mathscr{R}2$$
$$3\mathscr{R}4 \Rightarrow 4\mathscr{R}3$$

Otra forma de verlo es que dado cualquier par $(x, y) \in \mathscr{R}$ se tiene $(y, x) \in \mathscr{R}$.

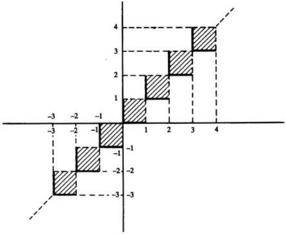
— $\mathscr{R}$ no es transitiva ya que $2\mathscr{R}3$ y $3\mathscr{R}4$ pero 2 no está relacionado con 4.

1.10. *En* $\mathbb{R}$ *definimos la relación,*

xRy si y sólo si existe un entero z tal que $x, y \in [z, z + 1)$.

Dibujar el grafo de R.

Solución



1.11. *En el conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *definimos la siguiente relación*

$$(a, b)\mathscr{R}(c, d) \iff a + d = b + c.$$

a) *Demostrar que* $\mathscr{R}$ *es una relación de equivalencia.*

b) *Dar representantes de las clases de* $(1, 4)$ *y* $(6, 2)$.

Solución

a) • *Propiedad reflexiva:* $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b)\mathscr{R}(a, b)$ ya que $a + b = b + a$.

• *Propiedad simétrica:* Si $(a, b)\mathscr{R}(c, d)$ entonces $a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a$ lo que implica que $(c, d)\mathscr{R}(a, b)$.

- *Propiedad transitiva:* Si $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$ tenemos $a+d=b+c$ y $c+f=d+e$. Sumando los primeros miembros de las dos igualdades obtenemos $a+d+c+f$ y sumando los segundos miembros obtenemos $b+c+$ $+d+e$. Por tanto, $a+f=b+e$ lo que implica que $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.

b) Cualquier elemento de la clase de (1, 4) será de la forma (a, b) con $a+4=b+1$, es decir $b=a+3$.

Podemos escribir la clase de estos elementos como el conjunto de elementos de la forma (a, a + 3) con $a \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, (0, 3), (7, 10), etc.

Análogamente,

$$(a,b)\mathcal{R}(6,2) \iff a+2=b+6, \text{ o bien } a=b+4.$$

La clase estará formada por los elementos de la forma (b+4, b) $b \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, (10, 6), (21, 17), etc.

1.12. *En* $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ *definimos la relación:*

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff ad=bc.$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia.*

b) Dar representantes de las clases $(-1,3)$ y $(0,2)$.

Solución

a)
- *Propiedad reflexiva:* Para todo (a,b) se verifica que $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ ya que $ab=ba$.
- *Propiedad simétrica:* Si $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ entonces $ad=bc$, por tanto $cb=da$ y se obtiene que $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.

- *Propiedad transitiva:* Si $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ y $(c,d)\mathscr{R}(e,f)$ se tiene $ad = bc$ y $cf = de$. Multiplicando miembro a miembro se obtiene $adcf = bcde$.

Como por definición $d \neq 0$ podemos dividir en los dos miembros de la igualdad por d, $acf = bce$.

Si $c \neq 0$ dividiendo por c obtenemos $af = be$ y por tanto $(a,b)\mathscr{R}(e,f)$.

Si $c = 0$ por la definición se tiene que $ad = 0$. Como $d \neq 0$ entonces $a = 0$. Por el mismo razonamiento se deduce que $e = 0$. Así se obtiene que $(0,b)\mathscr{R}(0,f)$.

b) Un elemento (a,b) relacionado con $(-1,3)$ debe satisfacer $3a = -b$. Así pues los elementos de la clase de equivalencia del $(-1,3)$ son de la forma $(a,-3a)$ donde $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Por ejemplo, $(-2,6)$, $(3,-9)$, etc.

Un elemento (a,b) relacionado con $(0,2)$ debe satisfacer $2a = 0$, por tanto $a = 0$. Luego los elementos de esta clase son de la forma $(0,b)$ donde b es un elemento cualquiera de $\mathbb{Z} - \{0\}$.

1.13. *Sea $(0,1)$ el conjunto de los números reales estrictamente mayores que 0 y estrictamente menores que 1.*

En el conjunto $X = (0,1) \times (0,1)$ definimos las siguientes relaciones.

$$(x,y)R_1(x',y') \quad \text{si y sólo si} \quad x = x'$$

$$(x,y)R_2(x',y') \quad \text{si y sólo si} \quad xy' = x'y$$

$$(x,y)R_3(x',y') \quad \text{si y sólo si} \quad y - 2x = y' - 2x'$$

a) Demostrar que R_1, R_2 y R_3 son relaciones de equivalencia.

b) Dar en cada caso una descripción geométrica de las clases de equivalencia.

Solución

a) Consideremos la relación R_1:

- *Propiedad reflexiva:* Para todo $(x, y) \in X$, $(x, y)R_1(x, y)$ ya que $x = x$.

- *Propiedad simétrica:* Si $(x, y)R_1(x', y')$ entonces $x = x'$ y por tanto $(x', y')R_1(x, y)$.

- *Propiedad transitiva:* Si $(x, y)R_1(x', y')$ y $(x', y')R_1(x'', y'')$, entonces $x = x' = x''$ y por tanto $(x, y)R_1(x'', y'')$.

La demostración de que R_2 es de equivalencia es análoga a la del problema 1.12.

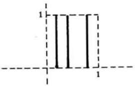
Veamos ahora R_3:

- *Propiedad reflexiva:* Para todo $(x, y) \in X$, $(x, y)R_3(x, y)$ ya que $y - 2x = y - 2x$.

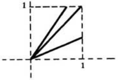
- *Propiedad simétrica:* Si $(x, y)R_3(x', y')$ entonces $y - 2x = y' - 2x'$, por tanto $y' - 2x' = y - 2x$ y entonces $(x', y')R_3(x, y)$.

- *Propiedad transitiva:* Si $(x, y)R_3(x', y')$ y $(x', y')R_3(x'', y'')$ se tiene que $y - 2x = y' - 2x' = y'' - 2x''$ y por tanto $(x, y)R_3(x'', y'')$.

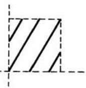
b) Las clases de equivalencia para R_1 están formadas por todos los puntos cuyas primeras coordenadas son iguales, es decir las clases de equivalencia son segmentos verticales. En la figura se representan algunas clases.



Cada clase de R_2 está formada por los puntos de X tales que y/x es una constante k. Así pues las clases son las intersecciones de las rectas $y = kx$ con el conjunto X.



Cada clase de R_3 está formada por los puntos de X tales que $y - 2x$ es una constante k. Podemos escribir $y = 2x + k$. Así pues las clases son las intersecciones de las rectas $y = 2x + k$ con X. En la figura se representan algunas clases



1.14. *Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida en un conjunto E. Sea A un subconjunto no vacío de E. Demostrar que $\mathcal{R} \cap (A \times A)$ es una relación de equivalencia en A.*

Solución

Designemos $\mathscr{R} \cap (A \times A)$ como $\mathscr{R}_A$.

— $\mathscr{R}_A$ es reflexiva:

Sea $x \in A$, por tanto $(x, x) \in A \times A$. Además $\mathscr{R}$ es reflexiva, $(x, x) \in \mathscr{R}$, por consiguiente, $(x, x) \in \mathscr{R}_A$. Es decir, para todo $x \in A$, $x\mathscr{R}_A x$.

— $\mathscr{R}_A$ es simétrica:

Sean $x, y \in A$.

Si $x\mathscr{R}_A y$, entonces $(x, y) \in \mathscr{R} \cap (A \times A)$. *Como* $\mathscr{R}$ es simétrica, el par $(y, x) \in \mathscr{R}$. Además, ya que $x, y \in A$, entonces $(y, x) \in A \times A$. Por tanto $(y, x) \in \mathscr{R}_A$ es decir $y\mathscr{R}_A x$.

— $\mathscr{R}_A$ es transitiva:

Sean $x, y, z \in A$.

Si $x\mathscr{R}_A y$, entonces $(x, y) \in \mathscr{R} \cap (A \times A)$.

Si $y\mathscr{R}_A z$, entonces $(y, z) \in \mathscr{R} \cap (A \times A)$.

Como $\mathscr{R}$ es transitiva, tenemos que $(x, z) \in \mathscr{R}$. Por otra parte, $x, z \in A$ implica que $(x, z) \in A \times A$. Así pues $(x, z) \in \mathscr{R}_A$, o bien $x\mathscr{R}_A z$.

Hemos demostrado que $\mathscr{R}_A$ es de equivalencia.

1.15. *En el conjunto* $\mathbb{R} - \{0\}$ *se define la relación*

$$xRy \text{ si y sólo si } x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia.

b) Hallar los elementos de la clase $[x]$.

Solución

a) — *Propiedad reflexiva:* Como $x + \dfrac{1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ para todo $x \in \mathscr{R} - \{0\}$ se tiene xRx.

— *Propiedad simétrica:* Si xRy entonces $x + \dfrac{1}{x} = y + \dfrac{1}{y}$ y por tanto $y + \dfrac{1}{y} = x + \dfrac{1}{x}$ y de aquí yRx.

— *Propiedad transitiva:* Si xRy e yRz entonces $x + \dfrac{1}{x} = y + \dfrac{1}{y} = z + \dfrac{1}{z}$ y por tanto xRz.

b) Sea $y \in [x]$, es decir xRy, y además $y \neq x$. Tenemos que $x + \dfrac{1}{x} = y + \dfrac{1}{y}$ que podemos escribir $y - x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{y-x}{xy}$. Deducimos que $xy = 1$ o bien $y = \dfrac{1}{x}$.

Así pues la clase $[x]$ es el conjunto $\left\{x, \dfrac{1}{x}\right\}$.

1.16. *En $\mathbb{Z}$ definimos la relación:*

$$mRn \text{ si y sólo si } m^2 - n^2 = m - n.$$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia.

b) Describir la clase $[m]$.

Solución

a) — *Propiedad reflexiva:* Para todo $m \in \mathbb{Z}$ mRm ya que $m^2 - m^2 = 0 = m - m$.

— *Propiedad simétrica:* Si mRn entonces $m^2 - n^2 = m - n$. Por tanto $n - m = n^2 - m^2$ y de aquí nRm.

— *Propiedad transitiva:* Si mRn y nRp entonces $m^2 - n^2 = m - n$ y $n^2 - p^2 = n - p$. Sumando ambas igualdades obtenemos $m^2 - p^2 = m - p$ y por tanto mRp.

b) Sea $n \in [m]$ y $n \neq m$. Por definición $m^2 - n^2 = m - n$ que podemos escribir como $(m + n)(m - n) = (m - n)$. Puesto que $m \neq n$ podemos dividir por $m - n$ y obtenemos $m + n = 1$ y de aquí, $n = 1 - m$. Por tanto la clase $[m]$ es el conjunto $\{m, 1 - m\}$.

1.17. *En $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se define la siguiente relación*

$$(a, b) \leqslant (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b \leqslant d \text{ o bien } a < c$$

(donde $\leqslant$ designa el orden usual en $\mathbb{N}$).

a) Demostrar que $\leqslant$ es una relación de orden total.

b) ¿Cuál es el elemento anterior al $(3, 2)$? ¿Y el anterior al $(5, 1)$?

c) ¿Tiene elemento siguiente cualquier elemento? ¿Existe primer elemento?

Solución

a) — *Propiedad reflexiva:* Para todo $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $(a, b) \leqslant (a, b)$ ya que $a = a$ y $b = b$.

— *Propiedad antisimétrica:* Si $(a, b) \leqslant (c, d)$ entonces $a = c$ y $b \leqslant d$ o bien $a < c$ si $(c, d) \leqslant (a, b)$ entonces $c = a$ y $d \leqslant b$

o bien $c < a$. Sólo es posible que se verifique simultáneamente que $a = c$, $b \leqslant d$ y $d \leqslant b$; por tanto $a = c$ y $b = d$ y de aquí $(a, b) = (c, d)$.

— *Propiedad transitiva*: Si $(a, b) \leqslant (c, d)$ y $(c, d) \leqslant (e, f)$, entonces,

$$a = c \quad \text{y} \quad b \leqslant d \quad \text{ó} \quad a < c$$
$$c = e \quad \text{y} \quad d \leqslant f \quad \text{ó} \quad c < e$$

Combinemos las cuatro posibilidades:

$a = c$, $b \leqslant d$, $c = e$ y $d \leqslant f$. Se deduce $a = e$ y $b \leqslant f$

$a = c$, $b \leqslant d$, $c < e$. Se deduce $a < e$

$a < c$, $c = e$, $d \leqslant f$. Se deduce $a < e$

$a < c$, $c < e$. Se deduce $a < e$

Así pues en todos los casos $(a, b) \leqslant (e, f)$. Hemos demostrado que $\leqslant$ es una relación de orden. Veamos que es un orden total.

Dados (a, b) y (c, d) pertenecientes a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ siempre podemos comparar ambos elementos ya que:

$$\text{Si } a < c \quad \text{entonces} \quad (a, b) \leqslant (c, d)$$
$$\text{Si } c < a \quad \text{entonces} \quad (c, d) \leqslant (a, b)$$

Si $a = c$ comparamos los segundos elementos: si $b \leqslant d$ entonces $(a, b) \leqslant (c, d)$ y si $d < b$ entonces $(c, d) \leqslant (a, b)$.

b) Vamos a ver que el elemento anterior al $(3, 2)$ es el $(3, 1)$. Para ello supongamos que existiera un elemento (a, b) distinto de ambos y tal que $(3,1) \leqslant (a, b) \leqslant (3, 2)$. Entonces:

$$3 \leqslant a \leqslant 3 \quad \text{y por tanto} \quad a = 3$$

y $1 \leqslant b \leqslant 2$ y por tanto $b = 1$ ó $b = 2$ y no sería distinto. Así pues no existe ningún elemento intermedio.

El elemento $(5, 1)$ no tiene anterior. Supongamos que (a, b) fuera el anterior a $(5, 1)$. Por definición $a < 5$ o bien $a = 5$ y $b \leqslant 1$. Esto último es imposible ya que $0 \notin \mathbb{N}^*$. Por tanto $a < 5$, pero en este caso (a, b) no puede ser el inmediatamente anterior a $(5, 1)$, ya que el elemento $(a, b + 1)$ es posterior a (a, b) y anterior a $(5, 1)$.

c) Todo elemento tiene elemento siguiente. El siguiente a un elemento (a, b) es el $(a, b + 1)$.

El primer elemento de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ es el $(1, 1)$.

1.18. *En $\mathbb{N}^*$ definimos la siguiente relación*

$$a \leqslant b \text{ si y sólo si } a \text{ divide a } b \text{ (se escribe } a/b\text{)}$$

a) Demostrar que es una relación de orden. ¿Es total?

b) Hallar el conjunto de las cotas inferiores del subconjunto $A = \{6, 9, 18, 36\}$.

c) ¿Existe mínimo de A? ¿Existe máximo de A?

Solución

a) — *Propiedad reflexiva:* Como todo elemento se divide a sí mismo, se tiene $a \leqslant a$.

— *Propiedad antisimétrica:* Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces a/b y b/a, por tanto $a = b$.

— *Propiedad transitiva:* Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces a/b y b/c, por tanto a/c y de aquí $a \leqslant c$.

Por tanto es una relación de orden. No es total ya que existen elementos no comparables. Por ejemplo 5 y 17, ya que 5 no divide a 17 ni 17 divide a 5.

b) Un elemento m es cota inferior de A si y sólo si $m \leqslant a$ para todo $a \in A$. Es decir si m/a para todo $a \in A$. Por tanto las cotas inferiores de A son el 1 y el 3. Podemos escribir

$$\text{Conjunto de cotas inferiores de } A = \{1, 3\}$$

c) No existe el mínimo de A ya que ningún elemento de A verifica que divide a todos los demás. Sí existe el máximo de A, el elemento 36, ya que todos los demás de A lo dividen.

1.19. *En $\mathbb{R}^2$ definimos la siguiente relación,*

$$(x, y) \leqslant (x', y') \quad \textit{si y sólo si} \quad x \leqslant x' \quad e \quad y \leqslant y'$$

donde $\leqslant$ es el orden usual en $\mathbb{R}$.

a) Demostrar que es una relación de orden.

b) ¿Es un orden total?

c) Dado un elemento (x, y) describir geométricamente todos los posteriores, en este orden, a (x, y).

Solución

a) — *Propiedad reflexiva:* $(x, y) \leqslant (x, y)$ ya que $x = x$ e $y = y$.

— *Propiedad antisimétrica:* Si $(x, y) \leqslant (x', y')$ y $(x', y') \leqslant (x, y)$ se tiene que $x \leqslant x'$ e $y \leqslant y'$ y $x' \leqslant x$ e $y' \leqslant y$. Por tanto $x = x'$ e $y = y'$. Así pues $(x, y) = (x', y')$.

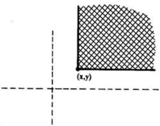
— *Propiedad transitiva:* Si $(x, y) \leqslant (x', y')$ y $(x', y') \leqslant (x'', y'')$

se tiene que $x \leqslant x' \leqslant x''$ e $y \leqslant y' \leqslant y''$ por tanto $(x, y) \leqslant (x'', y'')$.

Luego es una relación de orden.

b) No es un orden total ya que existen elementos no comparables, por ejemplo $(2, 8)$ y $(4, 6)$ ya que $2 \leqslant 4$ pero 8 no es $\leqslant$ que 6.

c) Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ los elementos posteriores a él son los de la figura:



1.20. *1) Demostrar que todo elemento n del conjunto* $\mathbb{N}^*$ *se puede escribir de la forma* $n = 2^r(2s + 1)$ *donde r y s son números naturales perfectamente determinados.*

2) Definimos en $\mathbb{N}$ *la siguiente relación,*

$$n \leqslant n' \text{ si y sólo si } r < r' \text{ o bien } r = r' \text{ y } s \leqslant s'$$

siendo $n = 2^r(2s + 1)$ *y* $n' = 2^{r'}(2s' + 1)$ *y* $\leqslant$ *el orden usual en* $\mathbb{N}$.

a) Demostrar que $\leqslant$ *es una relación de orden.*

b) Ordenar según $\leqslant$ *los números 3, 6, 14, 19, 20 y 24.*

Solución

1) Al descomponer un número natural no nulo en factores primos obtenemos una potencia de 2 (donde el exponente puede ser cero) y un producto de números primos diferentes de 2. Por tanto, dicho producto es un número impar y se puede expresar de la forma $2s + 1$. De la unicidad de la descomposición se sigue la unicidad de r y s.

Ejemplos:

$$n_1 = 144, \quad n_2 = 512 \quad \text{y} \quad n_3 = 75$$

$n_1 = 2^4 \cdot 3^2$ podemos escribirlo como $n_1 = 2^4(2 \cdot 4 + 1)$ y de aquí $r = 4$ y $s = 4$.

$n_2 = 2^9$ podemos escribirlo como $n_2 = 2^9(2 \cdot 0 + 1)$ y de aquí $r = 9$ y $s = 0$.

$n_3 = 3 \cdot 5^2$ que podemos escribir como $n_3 = 2^0(2 \cdot 37 + 1)$ y de aquí $r = 0$ y $s = 37$.

2) a) Es una demostración análoga a la del problema 1.17.

b) Descomponemos cada elemento en factores primos,

$$\begin{array}{llll}
3 = 1 \cdot 3 = 2^0 \cdot (2 \cdot 1 + 1) & \text{de aquí} & r = 0 & s = 1 \\
6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) & \text{de aquí} & r = 1 & s = 1 \\
14 = 2 \cdot 7 = 2^1 \cdot (2 \cdot 3 + 1) & \text{de aquí} & r = 1 & s = 3 \\
19 = 1 \cdot 19 = 2^0 \cdot (2 \cdot 9 + 1) & \text{de aquí} & r = 0 & s = 9 \\
20 = 2^2 \cdot 5 = 2^2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) & \text{de aquí} & r = 2 & s = 2 \\
24 = 2^3 \cdot 3 = 2^3 \cdot (2 \cdot 1 + 1) & \text{de aquí} & r = 3 & s = 1
\end{array}$$

Teniendo en cuenta la definición de $\leqslant$ podemos ordenar los elementos así,

$$3 \leqslant 19 \leqslant 6 \leqslant 14 \leqslant 20 \leqslant 24.$$

2. APLICACIONES

2.1. *Sea* $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *definida por* $f(z) = z^2$. Consideremos los subconjuntos

$$A = \{-2, 0, 2, 5, 7\} \quad y \quad B = \{-6, 0, 4, 49\}$$

a) Demostrar que $f|_A : A \to B$ *no es una aplicación.*

b) Hallar el mayor subconjunto A^* *de* A *tal que* $f|_{A^*} : A^* \to B$ *sea una aplicación. ¿Es* $f|_{A^*}$ *inyectiva? ¿Es sobre?*

c) Hallar subconjuntos C *de* A *y* D *de* B *para que* $f|_C : C \to D$ *sea biyectiva.*

Solución

a) No es aplicación ya que el elemento $5 \in A$ no tiene imagen en B.

b) $A^* = \{-2, 0, 2, 7\}$ ya que el elemento 5 era el único que no tenía imagen en B.

No es inyectiva ya que $f(-2) = f(2) = 4$.

No es sobre ya que $-6 \in B$ no es imagen de ningún elemento de A^*.

c) Por ejemplo $C = \{0, 2, 7\}$ y $D = \{0, 4, 49\}$

$$f|_C(0) = 0$$
$$f|_C(2) = 4$$
$$f|_C(7) = 49$$

$f|_C : C \to D$ es biyectiva.

2.2. *Sean f y g dos aplicaciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ definidas,*

$$f(z) = 3z + 4$$
$$g(z) = z^2 - 1$$

Hallar:

a) $g \circ f$.

b) $f \circ g$.

c) $f^{-1}(\mathbb{N})$, $g^{-1}(\{0, 3\})$.

d) ¿Son f^{-1} y g^{-1} aplicaciones?

Solución

a) $(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(3z + 4) = (3z + 4)^2 - 1 = 9z^2 + 24z + 15$.

b) $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(z^2 - 1) = 3(z^2 - 1) + 4 = 3z^2 + 1$.

c) $f^{-1}(\mathbb{N}) = \{z \in \mathbb{Z},\ f(z) \in \mathbb{N}\}$

es decir $z \in f^{-1}(\mathbb{N})$ si $3z + 4 > 0$ o bien $3z > -4$ o bien $z > -\dfrac{4}{3}$.

Por tanto, $f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$

$$g^{-1}(\{0, 3\}) = \{z \in \mathbb{Z},\ g(z) \in \{0, 3\}\}$$

es decir $z \in g^{-1}(\{0, 3\})$ si $z^2 - 1 = 0$ ó $z^2 - 1 = 3$. Esto implica que $z^2 = 1$ ó $z^2 = 4$ por tanto $z = 1$ ó $z = -1$ en el primer caso y $z = 2$ ó $z = -2$ en el segundo. Así pues

$$g^{-1}\{(0, 3)\} = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

d) g^{-1} no es aplicación ya que acabamos de ver en *c*) que $g^{-1}(0)$ es el conjunto $\{-1, 1\}$. Así pues el elemento 0 tendría dos imágenes y por tanto g^{-1} no puede ser aplicación.

Vemos ahora si f es biyectiva y por tanto f^{-1} es aplicación (biyectiva).

— f inyectiva:

Sean $z, z' \in \mathbb{Z}$ tales que $f(z) = f(z')$. Esto implica que $3z + 4 = 3z' + 4$, por tanto $3z = 3z'$ y de aquí $z = z'$. Luego f es inyectiva.

— f sobre:

Dado cualquier $z' \in \mathbb{Z}$ tenemos que ver que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = z'$ es decir existe z tal que $3z + 4 = z'$. De aquí $3z = z' - 4$ o bien $z = \dfrac{z' - 4}{3}$.

Pero $\dfrac{z' - 4}{3}$ no siempre es un número entero, por ejemplo si $z' = 5$ z sería $1/3$ que no pertenece a $\mathbb{Z}$. Así pues f no es sobre.

Observemos que sí lo sería si en lugar de ser una aplicación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ fuera una aplicación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$, por ejemplo.

2.3. *Sean f y g dos aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas,*

$$f(x) = x^2 - 4$$
$$g(x) = 3x + 6.$$

a) Estudiar qué tipo de aplicaciones son f y g.

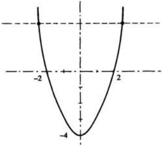
b) *Hallar* $g \circ f$ *y* $f \circ g$.

c) *Hallar* $(f^{-1} \circ g)(0)$.

Solución

a) f no es inyectiva ya que $f(-2) = f(2) = 0$. Tampoco es sobre: Escribamos $y = x^2 - 4$ por tanto $x^2 = y + 4$ o bien $x = \sqrt{y + 4}$. Es claro que si $y < -4$ entonces el radicando es negativo y no puede existir x tal que $f(x)$ sea y.

Si dibujamos la gráfica de la función (una parábola), vemos que las líneas horizontales por encima de $y = -4$ cortan a la parábola en dos puntos y por tanto no es inyectiva. Las líneas horizontales por debajo de $y = -4$ no cortan a la parábola y por tanto no es sobre.



g es biyectiva: Si escribimos $y = 3x + 6$ obtenemos $x = \dfrac{y - 6}{3}$ valor que existe para todo $y \in \mathbb{R}$. Por tanto podemos escribir $f^{-1}(y) = \dfrac{y - 6}{3}$ que es la aplicación inversa de f. Así pues f es biyectiva.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 4) = 3(x^2 - 4) + 6 = 3x^2 - 6$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 6) = (3x + 6)^2 - 4 = 9x^2 +$
$+ 36x + 32.$

c) $(f^{-1} \circ g)(0) = f^{-1}(g(0)) = f^{-1}(6) = \{-\sqrt{10}, +\sqrt{10}\}.$

2.4. *Sea* $f : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ *definida por*

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 5}.$$

Demostrar que f *es biyectiva.*

Solución

Escribamos $y = \dfrac{x + 3}{x - 5}$ e intentemos escribir x en función de y.

Tenemos $x + 3 = y(x - 5)$. Operando obtenemos

$$3 + 5y = x(y - 1).$$

Podemos despejar x:

$$x = \frac{3 + 5y}{y - 1}.$$

Para cada valor de $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ obtenemos un único valor de x.

Podemos escribir $f^{-1}(y) = \dfrac{3 + 5y}{y - 1}$ donde $f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{5\}$ y por tanto f es biyectiva.

2.5. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la correspondencia definida por*

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1} \quad \textit{(donde tomamos la raíz positiva).}$$

a) Hallar el dominio de f.

b) Hallar Im f.

Solución

a) Por una parte, el radicando ha de ser mayor o igual que cero, $4 - x^2 \geqslant 0$ o bien $4 \geqslant x^2$ lo que implica $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Por otra parte, el denominador no puede ser nulo, así que $x \neq 1$.

El dominio de f es por tanto el conjunto $[-2, 2] - \{1\}$.

b) Escribamos $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$. Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos $y^2 = \dfrac{4 - x^2}{(x - 1)^2}$ o bien $y^2(x^2 - 2x + 1) = 4 - x^2$. Agrupando los miembros del mismo grado de x obtenemos finalmente

$$(1 + y^2)x^2 - 2y^2x + (y^2 - 4) = 0.$$

Esta ecuación de segundo grado en x tiene raíces reales si el discriminante es mayor o igual que cero:

$$4y^4 - 4(y^2 - 4)(1 + y^2) \geqslant 0.$$

Operando tenemos

$$4y^4 - 4y^2 - 4y^4 + 16 + 16y^2 \geqslant 0,$$

o bien

$$12y^2 + 16 \geqslant 0, \quad 3y^2 + 4 \geqslant 0, \quad y^2 \geqslant \frac{-4}{3}.$$

Por tanto Im $f = \mathbb{R}$ ya que para todo $y \in \mathbb{R}$ $y^2 > -4/3$.

2.6. *Sea la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \quad es\ racional \\ 0 & si \quad x \quad es\ irracional. \end{cases}$$

Hallar $f(\sqrt{3}),\ f\left(-\dfrac{17}{5}\right),\ f(0{,}1717...),\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right),\ f(-1).$

Solución

Basta observar si los números son racionales o irracionales. Por tanto,

$$f\left(-\frac{17}{5}\right) = f(0{,}1717...) = f(-1) = 1 \qquad \text{por ser racionales}$$

$$f(\sqrt{3}) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{por ser irracionales.}$$

2.7. *Sea la correspondencia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & si \quad x \geqslant 4 \\ x^2 - 4 & si \quad -4 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8 - x & si \quad x \leqslant -4. \end{cases}$$

a) ¿Por qué no es una aplicación?

b) Modificar la definición de f para que lo sea.

Solución

a) El problema se presenta en los valores de x cuya imagen viene definida por dos expresiones distintas. Estudiemos $f(x)$ para $x = 4$ y $x = -4$,

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$$
$$f(4) = 4^2 - 4 = 12$$

al no coincidir, $x = 4$ tiene dos imágenes distintas y f no es aplicación,

$$f(-4) = (-4)^2 - 4 = 12$$
$$f(-4) = 8 - (-4) = 12,$$

para $x = -4$ no hay problema ya que ambas definiciones coinciden.

b) Puesto que f no es aplicación ya que $x = 4$ tiene dos imágenes distintas bastará modificar la definición de f de modo que $x = 4$ tenga una sola imagen. Podemos definir f así:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x \geqslant 4 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad -4 \leqslant x < 4 \\ 8 - x & \text{si} \quad x \leqslant -4 \end{cases}$$

o así:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x > 4 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad -4 \leqslant x \leqslant 4. \\ 8 - x & \text{si} \quad x \leqslant -4 \end{cases}$$

2.8. *Representar gráficamente la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ (valor absoluto de x).*

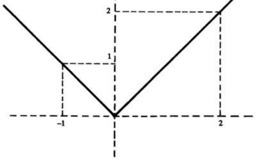
Solución

Recordemos que el valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Es decir, si $x \geqslant 0$, x coincide con su valor absoluto. Si x es negativo su valor absoluto es igual al opuesto de x.

Por tanto la representación gráfica de $f(x) = |x|$ será,



2.9. *Representar gráficamente la aplicación* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = E(x)$, *donde* $E(x)$ *es el mayor entero, menor o igual que* x.

Solución

Veamos primero algunos ejemplos:

$f(3) = 3$, ya que 3 es el mayor número entero menor o igual que 3

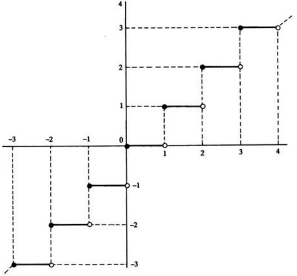
en general, $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{Z}$.

$f(4{,}8) = 4$, ya que el menor entero menor que 4,8 es 4.

$f(-5{,}7) = -6$, ya que -6 es el menor entero menor que $-5{,}7$

Observemos que cualquier número real x no entero estará contenido en un intervalo $(z, z+1)$, es decir $z < x < z + 1$. Así pues el mayor entero menor que x es z. Por tanto, $E(x) = z$ para todos los puntos del intervalo $(z, z+1)$. Como hemos visto más arriba que $E(z) = z$ si $z \in \mathbb{Z}$ tenemos que para todos los puntos de $[z, z+1)$ su imagen es z.

La representación gráfica será:



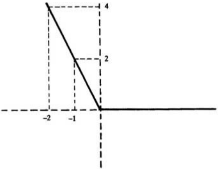
2.10. *Representar la aplicación* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = |x| - x$.

Solución

Por la definición del valor absoluto visto en el problema 2.8 tenemos

$$f(x) = \begin{cases} x - x = 0 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x - x = -2x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Por tanto, la representación gráfica será:

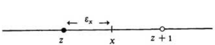


2.11. *Representar la aplicación $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - E(x)$ (donde $E(x)$ está definida como en el problema 2.9).*

Solución

Consideremos un intervalo $[z, z+1)$ donde $z \in \mathbb{Z}$. Podemos escribir para todo número real x perteneciente a ese intervalo:

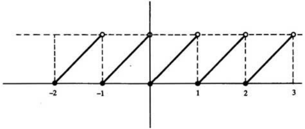
$$x = z + \varepsilon_x \quad \text{(véase la figura)}$$



Por tanto, $f(x)$ puede escribirse como:

$$f(x) = z + \varepsilon_x - z = \varepsilon_x.$$

Así pues, la representación gráfica será:



2.12. *Sea E un conjunto y A un subconjunto no vacío y distinto de E, que será fijo en lo que sigue. Definimos dos aplicaciones de $\mathscr{P}(E)$ en $\mathscr{P}(E)$ de la manera siguiente:*

$$\textit{Para todo } X \in \mathscr{P}(E): \quad \begin{aligned} f(X) &= X \cap A \\ g(X) &= X \cup A. \end{aligned}$$

a) Hallar $f(\mathscr{P}(E))$ y $g(\mathscr{P}(E))$.

b) Hallar $f^{-1}(f(A))$ y $g^{-1}(g(A))$.

Solución

a) Como para todo $X \in \mathscr{P}(E)$, $f(X) = X \cap A \subset A$ se tiene que $f(x) \in \mathscr{P}(A)$. Así pues $f(\mathscr{P}(E)) \subset \mathscr{P}(A)$. Por otra parte, para todo $X \in \mathscr{P}(A)$ existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tal que $f(X) = X \cap A = X$, obtenemos $\mathscr{P}(A) \subset f(\mathscr{P}(E))$. Por tanto $f(\mathscr{P}(E)) = \mathscr{P}(A)$.

Sea $X \in \mathscr{P}(E)$ designemos $X - A$ como X^*. Podemos escribir entonces $X \cup A = X^* \cup A$ donde esta unión es disjunta. Vamos a probar que

$$g(\mathscr{P}(E)) = \{X^* \cup A \quad \text{donde} \quad X^* \in \mathscr{P}(E - A)\}.$$

Sea $Y \in g(\mathscr{P}(E))$, Y es de la forma $X \cup A$ donde $X \in \mathscr{P}(E)$. Ahora bien, $X \cup A = X^* \cup A$ donde $X^* \cap A = \phi$; por tanto, $X^* \in \mathscr{P}(E - A)$. Así pues, $Y \in \{X^* \cup A,\ X^* \in \mathscr{P}(E - A)\}$ lo que implica $g(\mathscr{P}(E)) \subset \{X^* \cup A,\ X^* \in \mathscr{P}(E - A)\}$.

Sea ahora $Y \in \{X^* \cup A, X^* \in \mathscr{P}(E - A)\}$, $Y = X^* \cup A$ y por tanto $Y \in g(\mathscr{P}(E))$, luego $\{X^* \cup A,\ X^* \in \mathscr{P}(E - A)\} \subset g(\mathscr{P}(E))$ y de las dos inclusiones obtenemos la igualdad.

b) $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(A) = \{X \in \mathscr{P}(E),\ A \subset X\}$

$$g^{-1}(g(A)) = g^{-1}(A) = \mathscr{P}(A).$$

2.13. *Sean $f: A \to B$ y $g: B \to A$ dos aplicaciones tales que $g \circ f = 1_A$, donde 1_A designa la aplicación identidad en A. Decidir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:*

a) f es sobre,

b) f es inyectiva,

c) g es sobre,

d) g es inyectiva.

Solución

a) Es falsa. Veamos un contraejemplo:

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. Sean $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ y $g(a) = 1$, $g(b) = 2$, $g(c) = 3$, $g(4) = 1$. Se tiene que $g \circ f = 1_A$ pero f no es sobre.

b) Es cierta. Supongamos que no lo fuera. Esto implicaría que existen $a, a' \in A$ distintos tales que $f(a) = f(a') = b$. De $g \circ f = 1_A$ obtenemos

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a \quad \text{y}$$
$$(g \circ f)(a') = g(f(a')) = g(b) = a'.$$

Y por tanto $g(b)$ tendría dos imágenes distintas y no sería aplicación. Así pues la hipótesis de partida es falsa y f es inyectiva.

c) Es cierta. Para todo $a \in A$, por ser f aplicación, existe $b \in B$ tal que $f(a) = b$. Como $(g \circ f)(a) = a$ tenemos $g(f(a)) = g(b) = a$.

Por tanto para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $g(b) = a$. Así pues g es sobre.

d) Es falsa. Vale como contraejemplo el mismo del apartado *a*). La aplicación g no es inyectiva.

2.14. *Sean $f: X \to Y$ una aplicación, A un subconjunto de X y B un subconjunto de Y. Demostrar:*

a) $A \subset (f^{-1} \circ f)(A)$.

b) $(f \circ f^{-1})(B) \subset B$.

c) *¿Qué condiciones debe verificar la aplicación f en cada caso, para que se den las igualdades?*

Solución

a) Sea $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ lo que implica que $x \in f^{-1}(f(A)) = (f^{-1} \circ f)(A)$.

La otra inclusión, $(f^{-1} \circ f)(A) \subset A$, no es cierta en general: Sea $f: \mathbb{R} \to \{0\}$ definida $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $A = \mathbb{N}$, tenemos que $(f^{-1} \circ f)(A) = f^{-1}(0) = \mathbb{R}$ que no está contenido en $\mathbb{N}$.

b) Sea $y \in (f \circ f^{-1})(B)$. Esto implica que existe un $x \in f^{-1}(B)$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in f^{-1}(B)$ se tiene que $f(x) \in B$. Por tanto $y \in B$.

La otra inclusión no es cierta en general. Sea $f: \{0\} \to \mathbb{R}$ definida $f(0) = 0$. Sea $B = \mathbb{N}$. Tenemos $ff^{-1}(\mathbb{N}) = f(0) = \{0\}$ y $\mathbb{N}$ no está contenido en $\{0\}$.

c) La igualdad en *a*) se verifica si f es inyectiva:

Sea $x \in f^{-1}f(A)$ entonces $f(x) \in f(A)$, esto implica que existe $x' \in A$ tal que $f(x') = f(x)$. Como f es inyectiva $x = x'$ y por tanto $x \in A$.

La igualdad en *b*) se verifica si f es sobre:

Sea $y \in B$, por ser f sobre existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$; por tanto $x \in f^{-1}(B)$. Ahora bien, $y = f(x)$ implica que $y \in f(f^{-1}(B))$.

Luego $B \subset f(f^{-1}(B)) = (f \circ f^{-1})(B)$.

2.15. *Sean $f : X \to Y$ una aplicación y A y B dos subconjuntos de X. Demostrar:*

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$.

c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

d) *Qué condiciones debe cumplir f para que b) y c) sean igualdades?*

Solución

a) Sea $y \in f(A \cup B)$, por tanto existe un elemento $x \in A \cup B$ tal que $f(x) = y$. Entonces $x \in A$ ó $x \in B$. En cualquier caso $y = f(x) \in f(A)$ ó $y \in f(B)$. En cualquier caso $y \in f(A) \cup f(B)$ y ya tenemos la primera inclusión.

Sea $y \in f(A) \cup f(B)$, entonces $y \in f(A)$ ó $y \in f(B)$. En el primer caso existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ y en el segundo existe $x \in B$ tal que $f(x) = y$. Así pues, existe $x \in A \cup B$ tal que $f(x) = y$ y por tanto $y \in f(A \cup B)$.

b) Sea $y \in f(A) - f(B)$, entonces $y \in f(A)$ e $y \notin f(B)$. Por tanto existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ y no existe ningún $z \in B$ tal que $y = f(z)$. Por tanto $x \in A - B$ y de aquí $y = f(x) \in f(A - B)$.

Sea ahora $y \in f(A - B)$, esto implica que existe $x \in A - B$ tal que $f(x) = y$. De aquí que $y \in f(A)$. Sin embargo no podemos asegurar que $y \notin f(B)$ ya que podría existir otro elemento $z \in B$ tal que $f(z) = y$ en cuyo caso $y \in f(B)$ también.

c) Sea $y \in f(A \cap B)$ por tanto existe $x \in A \cap B$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in A$ y $x \in B$ se tiene que $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$ y por tanto $y \in f(A) \cap f(B)$. Tenemos demostrada la inclusión.

Sea $y \in f(A) \cap f(B)$. Por tanto existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ y existe $z \in B$ tal que $f(z) = y$. No podemos asegurar que los elementos x y z sean iguales.

d) Hemos visto en los dos apartados anteriores que lo que puede impedir la igualdad es la existencia de dos elementos distintos en X cuya imagen sea el mismo elemento $y \in Y$. Esto no ocurre si f es inyectiva.

Así pues, las igualdades se dan si y sólo si f es inyectiva.

2.16. *Sean $f : X \to Y$ una aplicación y A y B dos subconjuntos de Y. Demostrar:*

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

c) $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$.

Solución

a) Sea $x \in f^{-1}(A \cup B)$, por tanto $f(x) \in A \cup B$, es decir $f(x) \in A$ ó $f(x) \in B$. En el primer caso $x \in f^{-1}(A)$ y en el segundo $x \in f^{-1}(B)$. En cualquier caso $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Así pues, $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Sea ahora $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, entonces $x \in f^{-1}(A)$ ó $x \in f^{-1}(B)$. Por tanto, $f(x) \in A$ ó $f(x) \in B$, es decir $f(x) \in A \cup B$ y de aquí

$x \in f^{-1}(A \cup B)$. Obtenemos $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$ y de las dos inclusiones obtenemos la igualdad.

b) Se demuestra exactamente igual cambiando «$\cup$» *por* «$\cap$» y «o» por «y».

c) Sea $x \in f^{-1}(A - B)$, *entonces* $f(x) \in A - B$, es decir $f(x) \in A$ y $f(x) \notin B$; por tanto $x \in f^{-1}(A)$ y $x \notin f^{-1}(B)$. Así pues, $x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$.

Sea ahora $x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$, es decir $x \in f^{-1}(A)$ y $x \notin f^{-1}(B)$; por tanto $f(x) \in A$ y $f(x) \notin B$. Así pues, $f(x) \in A - B$ y de aquí $x \in f^{-1}(A - B)$.

2.17. *¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ son cerradas para la unión de conjuntos? ¿Cuáles para la intersección?*

a) $\mathscr{A}$ = *familia de intervalos.*

b) $\mathscr{B}$ = *familia de subconjuntos finitos (incluido el ϕ).*

c) $\mathscr{C}$ = *familia de subconjuntos que contienen el intervalo* $[0, 1]$.

Solución

a) $\mathscr{A}$ no es cerrada ni para la unión ni para la intersección, ya que la unión de dos intervalos puede no ser un intervalo y lo mismo para la intersección. Por ejemplo:

$[0, 1] \cup (3, 4)$ no es un intervalo

$[0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$ no es un intervalo.

b) $\mathscr{B}$ no es cerrada para la unión, ya que la unión infinita de subconjuntos finitos puede no ser un conjunto finito. Por ejemplo:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N} \quad \text{que no es finito.}$$

$\mathscr{B}$ sí es cerrada para la intersección. Veámoslo.

Sea B_i con $i \in I$ una colección de subconjuntos de $\mathscr{B}$. La intersección $\bigcap_{i \in I} B_i$ está contenida en B_i para cualquier i. Como B_i es finito cualquier subconjunto suyo, y en particular $\bigcap_{i \in I} B_i$, lo es también.

c) Sea C_i con $i \in I$ una colección arbitraria de subconjuntos de $\mathscr{C}$. Como $[0, 1] \subset C_i$ para todo i se tiene que $[0, 1] \subset \bigcup_{i \in I} C_i$ y $[0, 1] \subset \bigcap_{i \in I} C_i$. Así pues, esta familia $\mathscr{C}$ es cerrada para la unión y la intersección.

2.18. *¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$ son cerrados para la suma? ¿Cuáles para el producto?*

a) $\{0, 1\}$.

b) $\{n \in \mathbb{N},\ n \text{ es par}\}$.

c) $\{n \in \mathbb{N},\ n \text{ es impar}\}$.

d) $\{n \in \mathbb{N},\ n \text{ es primo}\}$.

e) $\{n \in \mathbb{N},\ n = 2^k \text{ donde } k \in \mathbb{N}\}$.

Solución

a) No es cerrado para la suma ya que $1 + 1 = 2 \notin \{0, 1\}$.

Sí lo es para el producto: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

b) Puesto que tanto la suma como el producto de dos números pares es un número par, este conjunto es cerrado para ambas operaciones.

c) No es cerrado para la suma ya que la suma de dos números impares es un número par. Sí lo es para el producto ya que el producto de dos números impares siempre es impar.

d) No es cerrado ni para la suma ni para el producto. Por ejemplo:

$$3 + 5 = 8 \text{ que no es primo}$$
$$3 \cdot 5 = 15 \text{ que no es primo.}$$

e) No es cerrado para la suma. Por ejemplo:

$$2 + 4 = 6 \text{ que no es una potencia de 2.}$$

Sí es cerrado para el producto:

$$2^k \cdot 2^{k'} = 2^{k+k'}.$$

2.19. *Sea $\mathscr{F}_x$ el conjunto de todas las aplicaciones de X en X. Consideremos en $\mathscr{F}_x$ la operación «$\circ$» composición de aplicaciones.*

a) ¿Es «$\circ$» asociativa?

b) ¿Es conmutativa?

c) ¿Existe elemento neutro para «$\circ$»?

d) ¿Para qué elementos de $\mathscr{F}_x$ existe el simétrico?

Solución

a) Sí es asociativa, ya que la composición de aplicaciones, en general, verifica esta propiedad.

b) No lo es. Por ejemplo sean f y g dos aplicaciones de $\mathscr{F}_x$ definidas,

$$f(x) = y \quad \text{para todo} \quad x \in X$$
$$g(x) = z \quad \text{para todo} \quad x \in X$$

donde y, z son dos elementos diferentes de X. Tenemos $(g \circ f)(x) = z$ y $(f \circ g)(x) = y$. Así pues $g \circ f \neq f \circ g$.

c) La aplicación identidad $1_X : X \to X$ definida $1_X(x) = x$ para todo $x \in X$ es el elemento neutro, ya que para todo $f \in \mathscr{F}_x$ $(f \circ 1_x)(x) = f(x)$, $(1_X \circ f)(x) = 1_X(f(x)) = f(x)$ y por tanto $f \circ 1_x = 1_x \circ f = f$.

d) Si f es biyectiva, existe f^{-1} aplicación biyectiva y tal que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_X$. Así pues f^{-1} es el simétrico de f.

2.20. *En el conjunto $\mathbb{Q}$ definimos la operación:*

$$a \perp b = a + b - ab.$$

a) Estudiar si $\perp$ es asociativa y conmutativa.

b) Estudiar si existe elemento neutro para $\perp$.

c) ¿Tiene algún elemento de $\mathbb{Q}$ elemento simétrico?

Solución

a) $\perp$ es conmutativa ya que tanto la suma como el producto usuales en $\mathbb{Q}$ lo son. Veamos si es asociativa:

$$\begin{aligned}(a \perp b) \perp c &= (a+b-ab) \perp c = (a+b-ab)+c-(a+b-ab)c = \\ &= a+b+c-ab-ac-bc+abc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \perp (b \perp c) &= a \perp (b+c-bc) = a+(b+c-bc)-a(b+c-bc) = \\ &= a+b+c-bc-ab-ac+abc\end{aligned}$$

y ambas expresiones son iguales. Por tanto es asociativa.

b) Supongamos que existe e elemento neutro. Por tanto deberá verificar $a \perp e = e \perp a = a$ para todo $a \in \mathbb{Q}$.

$$a \perp e = a + e - ae = a.$$

De aquí, $e(1 - a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{Q}$, lo cual sólo es posible si $e = 0$.

c) Si un elemento $a \in \mathbb{Q}$ tiene simétrico a', debe verificarse que $a \perp a' = e = 0$. Por tanto

$$a \perp a' = a + a' - aa' = 0$$

De aquí $a'(1 - a) = -a$, o bien $a' = \dfrac{a}{a - 1}$.

Por tanto todo elemento $a \in \mathbb{Q} - \{1\}$ tiene simétrico.

2.21. *En* $\mathbb{N}$ *definimos las operaciones*

$a * b = \text{m.c.d.}\,(a, b)$ *(m.c.d. significa el máximo común divisor)*

$a \# b = \text{m.c.m.}\,(a, b)$ *(m.c.m. significa el mínimo común múltiplo)*

a) Estudiar si estas operaciones tienen elemento neutro.

b) ¿Qué elementos tienen simétrico? (en cada uno de ellas).

Solución

a) Si existe elemento neutro e para $*$ debe verificar $a * e = a$ para todo a. Así pues:

$$a * e = \text{m.c.d.}\,(a, e) = a.$$

Se deduce que a debe ser divisor de e, y esto para todo $a \in \mathbb{N}$, por consiguiente e debe ser 0. Adoptemos el convenio $0 * 0 = 0$.

Análogamente para $\#$:

$$a \# e = \text{m.c.m.}\,(a, e) = a.$$

Por tanto, a debe ser múltiplo de e cualquiera que sea $a \in \mathbb{N}$, de aquí que $e = 1$.

b) Si un elemento $a \in \mathbb{N}$ tiene simétrico a', para $*$ debe verificarse

$$a * a' = \text{m.c.d.}\,(a, a') = 0$$

lo que es imposible. Así pues ningún elemento tiene simétrico. Análogamente para $\#$:

$$a \# a' = \text{m.c.m.}\,(a, a') = 1 \quad \text{donde} \quad a, a' \in \mathbb{N} - \{1\}.$$

Por tanto 1 debe ser múltiplo de a y a' lo cual es imposible. Ningún elemento tiene simétrico.

3. COMBINATORIA

3.1. *Encontrar n para que las siguientes igualdades sean satisfechas:*

a) $24V_{n,3} = 3V_{n+1,4}$.

b) $3V_{n,4} = V_{n-1,5}$.

c) $C_{n,n-2} = 10$.

d) $V_{n,4} = 30C_{n,5}$.

Solución

a) $24\dfrac{n!}{(n-3)!} = 3\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}$

quitando los denominadores y poniendo $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ queda

$$24n! = 3(n+1)n!$$

simplificando,

$$8 = n + 1$$

Por tanto $\boxed{n = 7}$.

b) $3\dfrac{n!}{(n-4)!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-6)!}$

Desarrollando los factoriales del primer miembro, podemos escribir

$$3\frac{n(n-1)!}{(n-4)(n-5)(n-6)!} = \frac{(n-1)!}{(n-6)!}.$$

Simplificando obtenemos

$$\frac{3n}{(n-4)(n-5)} = 1$$

y de aquí,

$$3n = (n-4)(n-5) = n^2 - 9n + 20.$$

O bien,

$$n^2 - 12n + 20 = 0.$$

$$n = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} = \begin{cases} 10 \\ 2. \end{cases}$$

La segunda solución no tiene sentido ya que ni $n - 4$, ni $n - 6$ serían números naturales. Por tanto $\boxed{n = 10}$.

c) $\dfrac{n!}{(n-2)!\,2!} = 10.$

Desarrollamos el factorial del numerador,

$$\frac{n \cdot (n-1)(n-2)!}{(n-2)!\,2!} = 10.$$

Por tanto, $n(n-1) = n^2 - n = 20$. O bien $n^2 - n - 20 = 0$.

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \\ -4. \end{cases}$$

La segunda solución no tiene sentido ya que es negativa. Por tanto, $\boxed{n = 5}$.

d) $\dfrac{n!}{(n-4)!} = 30\dfrac{n!}{(n-5)!\,5!}$.

Esto es equivalente a

$$n!(n-5)!\,5! = 30n!(n-4)!$$

Como $5! = 120$ y $(n-4)! = (n-4)(n-5)!$ podemos escribir

$$n!(n-5)!\,120 = 30 \cdot n!\,(n-4)(n-5)!$$

Simplificando obtenemos

$$4 = n - 4.$$

Por tanto, $\boxed{n = 8}$.

3.2. *Se dispone de 6 banderas diferentes para hacer señales. Cada señal consiste en disponer 3 banderas en fila. ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse?*

Solución

Como influye el orden de las banderas, para hacer cada señal tendremos $V_{6,3}$ es decir

$$V_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \text{ señales.}$$

3.3. *Calcular el número de colocaciones diferentes de 7 libros en un estante de modo que*

a) Tres libros determinados estén siempre juntos.

b) Esos tres libros estén siempre separados entre sí.

Solución

a) El grupo de los tres libros puede ocupar los lugares 1-2-3; 2-3-4; 3-4-5; 4-5-6 y 5-6-7. Dentro del grupo los libros pueden situarse de $P_3 = 6$ maneras diferentes. Los cuatro libros restantes ocupan los cuatro lugares vacíos de $P_4 = 4! = 24$ maneras diferentes. El número total de colocaciones será por tanto,

$$5 \cdot 6 \cdot 24 = 720$$

b) Ahora los tres libros especificados pueden ocupar las posiciones

1-3-5	2-4-6
1-3-6	2-4-7
1-3-7	2-5-7
1-4-6	3-5-7
1-4-7	

Nuevamente, dentro del grupo pueden distribuirse en $P_3 = 6$ modos diferentes y el resto en $P_4 = 4! = 24$ maneras. El total será

$$9 \cdot 6 \cdot 24 = 1.296.$$

3.4. *Un estudiante tiene que elegir al matricularse 3 asignaturas y 2 idiomas de un total de 7 asignaturas y 4 idiomas. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?*

Solución

Del enunciado se desprende que es indiferente el orden en el que elija las materias y obviamente no hay repeticiones. Tenemos por tanto que el número de maneras diferentes de elegir asignaturas es

$$C_{7,3} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

y el número de maneras de elegir los idiomas será

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

Por tanto, el número de planes de estudio diferentes que puede elegir será el producto de las anteriores cantidades, es decir, 210 maneras.

3.5. *a) ¿Cuántos números diferentes pueden formarse usando cuatro de las cifras* 1, 2, 3, 4, 5 *y* 6, *si las cifras no pueden repetirse?*

b) ¿Cuántos empiezan por 3*?*

c) ¿Cuántos acaban por 45*?*

Solución

a) $V_{6,4} = \frac{6!}{2!} = 360.$

b) La sexta parte de ellos empezará por 3 (y lo mismo para cualquier otra cifra), es decir 60.

Otro modo de verlo es que al fijar como primera cifra el 3 y no admitirse repeticiones tenemos cinco cifras para tres lugares, por tanto, serán

$$V_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

c) Si fijamos las dos últimas cifras (45) tenemos cuatro cifras y dos lugares disponibles, es decir,

$$V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

3.6. *¿Cuántos números existen entre el* 4.000 *y el* 6.000 *formados por las cifras* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *y* 6 *sin repetir ninguna cifra?*

Solución

Del enunciado se deduce que los números buscados sólo pueden empezar por 4 ó por 5. Una vez fijada una de estas dos cifras tenemos 6 dígitos disponibles para tres lugares, por tanto

$$V_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 120.$$

Luego en total $2 \cdot 120 = 240$ números cumplen la condición.

3.7. *Calcular el número de colocaciones de siete objetos en una fila de modo que un objeto fijado de antemano esté:*

a) En un extremo de la fila.

b) En el centro.

Solución

a) Puesto que el objeto puede ocupar cualquiera de los dos extremos y el resto puede repartirse de P_6 maneras diferentes, tendremos $2 \cdot 6!$ es decir 1.440 colocaciones.

b) Una vez colocado el objeto en el centro los otros seis pueden ocupar cualquiera de los seis lugares restantes. Hay por tanto P_6, es decir 720 colocaciones diferentes.

3.8. *Con las cifras* $0, 1, 2..., 9$ *formemos números de cinco cifras.*

a) ¿Cuántos números diferentes pueden formarse sin repetir cifras?

b) ¿Cuántos son números pares?

Si permitimos la repetición de cifras:

c) ¿Cuántos números empiezan por 31?

d) ¿Cuántos números son impares?

e) ¿Cuántos números son divisibles por cinco?

Solución

a) Puesto que hay que elegir cinco cifras de entre las diez, sin repetición, tendremos $V_{10,5}$ es decir

$$V_{10,5} = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30.240 \text{ números.}$$

Entre estos números están incluidos los que empiezan por cero. Tenemos por tanto que restar a esa cantidad la décima parte. El resultado será:

$$30.240 - 3.024 = 27.216 \text{ números.}$$

b) Un número es par si su última cifra es par y es impar si la última cifra es impar. Como entre los números 0, 1, 2, ..., 9 la mitad son pares (el «0» se considera par) y la otra mitad impares; lo mismo ocurrirá en los números de cinco cifras. Así pues, 13.608 serán pares.

c) Una vez fijadas las dos primeras cifras 31_ _ _ tenemos diez para cubrir los tres lugares restantes ya que se admiten repeticiones. Por tanto habrá.

$$V'_{10,3} = 10^3 = 1.000.$$

d) La cantidad total de números de cinco cifras con repeticiones será $V'_{10,5}$ menos la décima parte de éstos que son los que empiezan por cero. Así pues $V'_{10,5} - \frac{V'_{10,5}}{10} = 100.000 - 10.000 =$ $= 90.000$ de los cuales la mitad son pares, es decir 45.000.

e) Para que un número sea divisible por cinco ha de terminar en cero o en cinco. Por tanto, la quinta parte, es decir, 18.000 serán divisibles por cinco.

3.9. *a) ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse en una fila 6 hombres y 5 mujeres, de modo que éstas ocupen los lugares pares?*

b) ¿Y si todas las mujeres han de estar en lugar impar?

Solución

a) Ya que en la fila hay 11 lugares, 6 impares y 5 pares y las mujeres ocupan estos últimos, el esquema será,

H M H M H M H M H M H

Cada una de las mujeres puede ocupar cualquiera de los lugares pares y cada hombre uno cualquiera de los lugares impares, influyendo el orden en que estén sentados dentro de cada grupo. Las mujeres pueden sentarse por tanto de P_5 maneras y los hombres de P_6 maneras. Al cambiar ambos grupos obtenemos

$$P_6 \cdot P_5 = 6!\,5! = 86.400 \text{ maneras}$$

b) En este caso hay cinco mujeres y seis lugares impares, por tanto las mujeres pueden sentarse de $6 \cdot P_5$ maneras, es decir de 720 maneras. Los seis hombres se pueden situar en los seis lugares restantes de P_6 modos diferentes.

Por tanto, el número total será $6 \cdot P_5 \cdot P_6$, es decir 518.400 maneras diferentes.

3.10. *¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar en un estante 5 libros de Matemáticas, 4 de Física y 2 de Química de modo que los de cada materia estén juntos?*

Solución

El número de formas de ordenarlos por materias será $P_3 = 6$. Dentro de cada grupo, los libros de una asignatura se pueden colocar de las siguientes maneras:

$P_5 = 5! = 120$	los de Matemáticas
$P_4 = 4! = 24$	los de Física
$P_2 = 2$	los de Química.

El número buscado será entonces

$$6 \cdot 120 \cdot 24 \cdot 2 = 34.560.$$

3.11. *¿De cuántas maneras diferentes podemos seleccionar 4 objetos de un total de 12 si,*

a) Un objeto especificado de antemano debe estar en cada selección.

b) Si dos objetos concretos deben ser excluidos siempre.

c) Si uno debe estar siempre incluido y dos siempre excluidos.

Solución

a) Una vez seleccionado el objeto especificado, el problema se reduce a elegir 3 objetos de un total de 11, por tanto lo podemos hacer de

$$C_{11,3} = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{6 \cdot 8!} = 165$$

b) El problema en este caso es elegir 4 objetos de un total de 10, cosa que puede hacerse de

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6!} = 210$$

c) Combinando las respuestas anteriores tenemos que hay que seleccionar 3 objetos de un total de 9, es decir

$$C_{9,3} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6 \cdot 6!} = 84$$

3.12. *Dadas 9 consonantes y 4 vocales. ¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes pueden formarse de modo que haya 4 consonantes y 2 vocales? (Las «palabras» formadas pueden carecer de sentido.)*

Solución

El número de grupos de cuatro consonantes que podemos elegir será

$$V_{9,4} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3.024.$$

Igualmente para las vocales tendremos,

$$V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Al combinar las consonantes y las vocales para formar las palabras fijémonos en los lugares que pueden ocupar las dos vocales:

$$\begin{array}{cccccc}
\underline{v} & \underline{v} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{c} \\
\underline{v} & \underline{c} & \underline{v} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{c} \\
 & & & \vdots & & \\
\underline{v} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{v} \\
\underline{c} & \underline{v} & \underline{v} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{c} \\
 & & & \vdots & & \\
\underline{c} & \underline{v} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{v} \\
 & & & \vdots & & \\
\underline{c} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{c} & \underline{v} & \underline{v}
\end{array}$$

En total quince. Así pues el resultado total será

$$15 \cdot V_{9,4} \cdot V_{4,2} = 544.320$$

3.13. *a)* *¿Cuántos números naturales hay entre el 300 y el 1.200 que no tienen cifras repetidas?*

b) *¿Cuántos tienen todas las cifras impares?*

Solución

a) Los números de tres cifras empezarán por 3, 4, ..., 9, las otras dos cifras han de ser diferentes a la inicial y entre sí tendremos por tanto,

$$7 \cdot V_{9,2} = 7 \cdot \frac{9!}{7!} = 7 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 504$$

Los números de cuatro cifras empezarán por 10 simplemente, ya que los que empiezan por 11 tienen una cifra repetida. Así pues de los que empiezan por 10 habrá:

$$V_{8,2} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 56$$

Luego en total hay 560 números.

b) Sólo pueden ser números de tres cifras, que empezarán por 3, 5, 7 ó 9. Fijado el primero, disponemos de otras cuatro cifras impares para dos lugares. El total será entonces:

$$4 \cdot V_{4,2} = 4 \cdot \frac{4!}{2!} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 48$$

3.14. *Un entrenador de fútbol dispone en su plantilla de 3 porteros, 7 defensas, 7 centrocampistas y 5 delanteros. Se sabe que siempre alinea 1 portero, 4 defensas, 4 centrocampistas y 2 delanteros. ¿Cuántas alineaciones diferentes puede formar? (Se supone que cada jugador sólo puede jugar en ese tipo de puesto, pero puede ocupar cualquier lugar dentro del mismo tipo.)*

Solución

Una alineación será el conjunto ordenado formado por 1 portero, 4 defensas, 4 centrocampistas y 2 delanteros. El número de formas de elegir a los jugadores dentro de cada tipo será:

Portero:	3
Defensas:	$V_{7,4} = \dfrac{7!}{3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 720$
Centrocampistas:	igual que para los defensas
Delanteros:	$V_{5,2} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

El número total de alineaciones diferentes que puede formar será

$$3 \cdot 720 \cdot 720 \cdot 20 = 31.104.000$$

Obsérvese que el problema es distinto a este otro. ¿Cuántos equipos diferentes de 11 jugadores puede formar con su plantilla con la condición de que haya 1 portero, 4 defensas, 4 centrocampistas y dos delanteros? En este caso no importaría el orden y se sustituirían las variaciones por combinaciones:

$$3 \cdot C_{7,4} \cdot C_{7,4} \cdot C_{5,2} = 3 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 10 = 36.750$$

3.15. *Un campeonato deportivo se juega entre 9 equipos por el sistema de todos contra todos a una sola vuelta. Si cada equipo no puede jugar más de un partido a la semana. ¿Cuántas semanas durará el campeonato y cuántos partidos se celebrarán en total durante el mismo?*

Solución

Cada semana juegan 8 equipos (cuatro partidos) y uno descansa. Por tanto, el campeonato durará 9 semanas y se jugarán 36 partidos.

Otra forma de verlo es así: Como cada equipo juega contra todos los demás y se necesitan dos equipos para formar un partido tendremos que el número de partidos será

$$C_{9,2} = \frac{9!}{2!\,7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2} = 36 \text{ partidos.}$$

Como cada semana se juegan cuatro partidos tendremos $\frac{36}{4} = 9$ semanas de duración del campeonato.

3.16. *¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?*

Solución

Puesto que cada diagonal une dos vértices no contiguos, el número de diagonales será el número de pares de vértices menos el número de lados. Es decir,

$$C_{n,2} - n = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

Podemos comprobarlo para los polígonos con n «pequeño»:

— Para los triángulos $n = 3$ no hay diagonales.

— Para los cuadrados $n = 4$ hay dos diagonales.

— Para los pentágonos $n = 5$ hay cinco diagonales.

Otro modo de verlo es el siguiente: Cada vértice pertenece a $n - 3$ diagonales, ya que está unido mediante ellos con todos los demás vértices excepto con los dos adyacentes y con él mismo. Tenemos que cada diagonal es contada dos veces por este procedimiento. El número total es por tanto

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

3.17. *En el desarrollo de* $(1 + x)^n$ *sabemos que el coeficiente del término de grado p es igual al coeficiente del término de grado 3p y que el coeficiente del término de grado p + 1 es igual al coeficiente del término 2p. Calcular n y p.*

Solución

Por las propiedades de los números combinatorios sabemos que $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ cuando $a = b$ ó $a + b = n$. Aplicándolo a los datos del problema tenemos:

$$n = p + 3p = 4p$$

$$n = p + 1 + 2p = 3p + 1, \text{ por tanto}$$

$$n = 4p = 3p + 1$$

Y de aquí $p = 1$ y por tanto $n = 4$.

Comprobémoslo numéricamente

$$\binom{n}{3p} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!} = 4$$

$$\binom{n}{p} = \binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)!} = 4$$

$$\binom{n}{p+1} = \binom{4}{2} = \binom{n}{2p}$$

4. PROBABILIDAD

4.1. *De una baraja francesa de 52 cartas se han extraído cuatro tréboles. Calcular la probabilidad de que la próxima carta extraída sea otro trébol.*

Solución

Sea A el suceso del enunciado. Tras extraer cuatro tréboles quedan 48 cartas en la baraja, de las cuales 9 son tréboles. Se supone la baraja bien mezclada de modo que todas las cartas tengan la misma probabilidad de ser extraídas. Así pues tenemos

Número de casos favorables: 9
Número de casos posibles: 48

Entonces la probabilidad buscada será

$$P(A) = \frac{9}{48}$$

4.2. *Cinco libros de Física, cuatro de Geografía y dos de Geología se colocan al azar en un estante. ¿Cuál es la probabilidad de que dos libros de cada asignatura estén juntos?*

Solución

El número de casos posibles es el número de posibles ordenaciones de los once libros en el estante, es decir

$$P_{11} = 11!$$

El número de casos favorables es el número de ordenaciones de los libros de modo que queden juntos los de la misma asignatura. Este número es

$$P_3 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_2 = 3!\,5!\,4!\,2!$$

Ya que hay P_3 formas de ordenar las asignaturas, P_5 formas de ordenar los libros de Física, P_4 los de Geografía y P_2 los de Geología. Por tanto la probabilidad que se busca

$$\frac{3!\,5!\,4!\,2!}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{1}{11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{1.155}$$

4.3. *Se colocan siete objetos verdes y cuatro blancos al azar en una fila. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Que los objetos de ambos extremos sean blancos.

b) Que el objeto central sea verde.

Solución

a) El número de posibles ordenaciones de once objetos es

$$P_{11} = 11!$$

El número de casos favorables será el de parejas ordenadas distintas que se pueden formar con los cuatro objetos blancos,

$V_{4,2}$, por el número de ordenaciones de los nueve objetos restantes P_9.

Por tanto la probabilidad buscada es

$$V_{4,2} \cdot \frac{P_9}{P_{11}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 9!}{11 \cdot 10 \cdot 9!} = \frac{6}{55}.$$

b) Puesto que hay siete objetos verdes de un total de once, la probabilidad del suceso «que el objeto central sea verde» es

$$\frac{7}{11}.$$

4.4. *Seis personas se sientan al azar alrededor de una mesa ovalada Calcular la probabilidad de que dos personas fijadas previamente se sienten juntos.*

Solución

El número de formas posibles de sentarse seis personas alrededor de una mesa es $P_6 = 6!$

Observemos que una de las dos personas fijadas previamente puede ocupar cualquiera de los seis asientos. La otra persona fijada ha de sentarse en cualquiera de los dos asientos adyacentes. Las otras cuatro personas pueden sentarse en los cuatro asientos restantes de $P_4 = 4!$ maneras. Así pues los casos favorables son

$$6 \cdot 2 \cdot 4!$$

Luego la probabilidad buscada es

$$\frac{6 \cdot 2 \cdot 4!}{6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{2}{5}.$$

4.5. *De una caja que contiene cuatro bolas rojas, tres blancas y cinco azules, extraemos una bola al azar. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Que la bola extraída sea roja.

b) Que la bola extraída sea blanca.

c) Que la bola extraída no sea azul.

Solución

Designemos por R, B y A el suceso «que la bola extraída sea del color correspondiente». El número de casos posibles es 12.

a) El número de casos favorables es 4. Así pues:

$$P(R) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

b) El número de casos favorables es ahora de 3. Por tanto,

$$P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

c) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

El número de casos favorables para obtener una bola azul es 5. Entonces

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

y de aquí,

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

4.6. *Se lanza una moneda seis veces. Calcular la probabilidad de los sucesos siguientes:*

a) Obtener al menos tres caras.

b) Obtener exactamente cuatro caras.

c) Obtener cara en las tiradas impares (no se dice nada sobre las tiradas pares).

d) Que en la última tirada se obtenga cara.

Solución

Sea C el suceso sacar cara en una tirada y $\bar{C}$ el sacar cruz $p(C) = p(\bar{C}) = \frac{1}{2}$. Sea E el suceso del enunciado en cada caso.

a) Al lanzar una moneda seis veces pueden obtenerse $2^6 = 64$ resultados distintos. Observemos que existe una sola manera de no obtener caras (seis cruces), hay $\binom{6}{1}$ maneras de obtener exactamente una cara (cara, en cualquiera de las seis monedas), $\binom{6}{2}$ maneras de obtener dos caras y así sucesivamente.

Por tanto,

$$P(E) = \frac{\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}}{64} = \frac{20 + 15 + 6 + 1}{64} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32}.$$

b) Por lo dicho en el apartado a)

$$P(E) = \frac{\binom{6}{4}}{64} = \frac{15}{64}$$

c) Puesto que las tiradas impares quedan fijadas, ya que se ha de obtener cara en ellas, el número de formas distintas de obtener este resultado nos lo darán las tiradas pares: ocho maneras distintas. Entonces,

$$P(E) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

d) En este caso $P(E) = P(C) = \dfrac{1}{2}$ ya que no depende de las tiradas anteriores.

4.7. *Se eligen al azar los coeficientes de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ entre los números 2, 3, 5, 6 y 8. Calcular la probabilidad de los sucesos:*

a) Que las dos raíces de la ecuación sean reales.

b) Que las dos raíces sean iguales.

Solución

El número de casos posibles es el número de maneras distintas de elegir los tres coeficientes de la ecuación, es decir

$$V^r_{5,3} = 5^3 = 125$$

a) Calculamos el número de casos favorables. La condición para que la ecuación de segundo grado tenga dos raíces reales es:

$$b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

Observemos que como el valor mínimo posible de a y de c es 2 entonces $b^2 \geqslant 16$, por tanto b ha de ser 5, 6 u 8. Para cada uno de estos valores vamos a ver qué valores pueden tomar a y c.

Caso $b = 5$:

Entonces $4ac \leqslant 25$, por tanto $ac \leqslant \frac{25}{4}$. Como ac es un número entero, ha de ser menor o igual a 6. Por otra parte ha de ser mayor o igual que 4. Tenemos las siguientes posibilidades:

$$a = 2, c = 2 \quad ; \quad a = 3, c = 2 \quad ; \quad a = 2, c = 3$$

Caso $b = 6$:

Ahora $4ac \leqslant 36$, es decir $ac \leqslant 9$. Tenemos los siguientes valores admisibles:

$$a = 2, c = 2 \quad ; \quad a = 2, c = 3 \quad ; \quad a = 3, c = 2 \quad ; \quad a = 3, c = 3$$

En este último caso se da la igualdad $b^2 - 4ac = 0$.

Caso $b = 8$:

Ahora $4ac \leqslant 64$, es decir $ac \leqslant 16$. Obtenemos los siguientes valores:

$a=2, c=2$; $a=2, c=3$; $a=2, c=5$; $a=2, c=6$; $a=2, c=8$

$a=3, c=2$; $a=3, c=3$; $a=3, c=5$

$a=5, c=2$; $a=5, c=3$

$a=6, c=2$

$a=8, c=2$

En los casos $a = 2$, $c = 8$ y $a = 8$, $c=2$ se obtiene la igualdad $b^2 - 4ac = 0$.

Por tanto, la probabilidad del suceso «que las dos raíces sean reales» es

$$\frac{3 + 4 + 12}{125} = \frac{19}{125}$$

b) Para que las dos raíces sean iguales es necesario que $b^2 - 4ac = 0$. Hemos visto en el apartado anterior que la igualdad se verifica en tres casos solamente

$$a = 3,\ b = 6,\ c = 3;$$

$$a = 8,\ b = 8,\ c = 2 \text{ y}$$

$$a = 2,\ b = 8,\ c = 8.$$

La probabilidad del suceso «que las dos raíces sean iguales» es entonces

$$\frac{3}{125}.$$

4.8. *Una bolsa contiene cinco bolas blancas y tres negras. Otra bolsa contiene dos bolas blancas y cuatro negras. Se extrae al azar una bola de cada bolsa. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:*

a) Que ambas bolas sean blancas.

b) Que ambas bolas sean negras.

c) Que al menos una bola extraída sea negra.

d) Que una sea blanca y la otra negra.

Solución

Sean B_1 el suceso «extraer una bola blanca de la primera bolsa».

N_1 el suceso «extraer una bola negra de la primera bolsa».

B_2 el suceso «extraer una bola blanca de la segunda bolsa».

N_2 el suceso «extraer una bola negra de la segunda bolsa».

A el suceso del enunciado en cada uno de los casos.

a) $P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{24}$.

b) $P(A) = P(N_1) \cdot P(N_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{4}$.

c) $P(A) = 1 - P(B_1)P(B_2) = 1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24}$.

d) $P(A) = 1 - (P(B_1) \cdot P(B_2) + P(N_1) \cdot P(N_2)) =$

$$= 1 - \left(\frac{5}{24} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{24}.$$

4.9. *La probabilidad de que cierto hombre viva al cabo de 30 años es 3/7 y la probabilidad de su esposa 5/6. Determinar las probabilidades de los siguientes sucesos 30 años después,*

a) Que vivan todavía ambos.

b) Que ambos hayan muerto.

c) Que sólo viva la mujer.

Solución

Sean H el suceso «el hombre permanece vivo al cabo de 30 años».

M el suceso «la mujer vive al cabo de 30 años».

E el suceso del enunciado en cada caso.

a) $E = H \cap M$

$$P(E) = P(H) \cdot P(M) = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{14}$$

b) $E = \bar{H} \cap \bar{M}$

$$P(E) = P(\bar{H}) \cdot P(\bar{M}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{21}$$

c) $E = \bar{H} \cap M$

$$P(E) = P(\bar{H}) \cdot P(M) = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{21}.$$

4.10. *Se elige al azar un número natural de tres cifras. Calcular las siguientes probabilidades:*

a) Que sea múltiplo de 25.

b) Que acabe en 3.

c) Que empiece por impar y acabe por 7.

Solución

Sean A, B y C, respectivamente, los tres sucesos del enunciado.

La cantidad total de números de tres cifras es 900.

a) Un número es múltiplo de 25 si y sólo si acaba en 20, 50, 75 ó en 00. Es decir hay cuatro números en cada centena que son múltiplos de 25. Por tanto, el número de sucesos favorables es $9 \cdot 4 = 36$.

Así pues,

$$P(A) = \frac{36}{900} = \frac{1}{25}.$$

b) En cada decena hay un número que acaba en 3. Por tanto, en nuestro caso, los sucesos favorables son 90. Así pues,

$$P(B) = \frac{90}{900} = \frac{1}{10}.$$

c) Sea c_1 el suceso «empieza por impar» y c_2 el suceso «acaba por 7». Por tanto, el suceso C es $c_1 \cap c_2$. Entonces,

$$P(c) = P(c_1) \cdot P(c_2)$$

$$P(c_1) = \frac{5}{9}$$

$$P(c_2) = \frac{1}{10}$$

$$P(C) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{18}.$$

4.11. *Dos jugadores de ajedrez A y B tienen las siguientes probabilidades de ganar en cada partido que disputen entre ellos, $P(A) = 4/7$ y $P(B) = 3/7$ (se supone que no hacen tablas). Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos, sabiendo que juegan tres partidas.*

a) A gana al menos una partida.

b) B no gana ninguna partida.

c) A gana dos partidas y B una.

Solución

Designemos por A_1, A_2, A_3 los sucesos «A gana la 1.ª partida, la 2.ª o la 3.ª», respectivamente y análogamente B_1, B_2, B_3.

Sea C el suceso del enunciado en cada caso.

a) C es el complementario del suceso $B_1 \cap B_2 \cap B_3$ cuya probabilidad es $\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{27}{343}$.

Así pues $P(C) = 1 - \frac{27}{343} = \frac{316}{343}$.

b) C es el suceso $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Así pues,

$$P(C) = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343}.$$

c) C es ahora el suceso

$$(A_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup (A_1 \cap B_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Por tanto,

$$P(C) = 3 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{144}{343}.$$

4.12. *La probabilidad de que tres tiradores acierten a un blanco es, respectivamente, de* $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ *y* $\frac{1}{3}$. *Cada uno dispara una sola vez.*

a) Hallar la probabilidad de que haya sólo un acierto.

b) Si solamente uno ha acertado. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el primero?

Solución

Sean A, B y C los sucesos «Acierta el primer tirador, el segundo, el tercero», respectivamente. Sean D y E los sucesos «Un solo acierto» y «Sólo acierta el primero».

Podemos escribir,

$$D = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$

Por tanto,

$$P(D) = P(A)\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A})\cdot P(B)\cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(C) =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{6+8+12}{60} = \frac{26}{60} = \frac{13}{30}$$

$$P(E) = P(A)\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C}) = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{10}.$$

4.13. *De una baraja francesa de 52 cartas se extraen al azar tres cartas sucesivamente, con devolución en cada caso de la carta extraída y mezcla posterior de la baraja. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:*

a) Las tres cartas extraídas son diamantes.

b) Que al menos una sea figura (una J, una Q o una K).

c) Que haya algún AS entre las extraídas.

d) Que exactamente dos cartas sean negras

Solución

Sea E el suceso del enunciado en cada caso. Designaremos con el subíndice 1, 2 ó 3 a un determinado suceso ocurrido en la primera, en la segunda o en la tercera extracción.

a) Sea D el suceso «extraer una carta de diamantes». Entonces

$$E = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

b) Sea F el suceso «extraer una figura». El suceso E es el complementario del suceso $\bar{E}$ «no extraer ninguna figura». Tenemos

$$\bar{E} = \bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3 = \left(\frac{10}{13}\right)^3 = \frac{1.000}{2.197}.$$

Por tanto

$$E = 1 - \frac{1.000}{2.197} = \frac{1.197}{2.197}$$

c) Sea A el suceso «extraer un AS».

El suceso E es el complementario de $\bar{E}$ «no obtener ningún AS»

$$\bar{E} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \left(\frac{12}{13}\right)^3 = \frac{1.728}{2.197}$$

Por tanto,

$$E = 1 - \frac{1.728}{2.197} = \frac{469}{2.197}.$$

d) Sea N el suceso «extraer una carta negra». El suceso E es ahora:

$$E = (N_1 \cap N_2 \cap \bar{N}_3) \cup (N_1 \cap \bar{N}_2 \cap N_3) \cup (\bar{N}_1 \cap N_2 \cap N_3) =$$
$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}.$$

4.14. *Con los mismos datos del problema anterior, pero sin devolución de cada carta extraída, calcúlese las probabilidades de los siguientes sucesos:*

a) Que salgan en este orden: una de PICAS, una de TRÉBOL y una de CORAZÓN.

b) Que se obtenga el 2, el 3 y el 4 de PICAS.

c) Que las tres sean de diferente palo.

Solución

Designemos por P, T y C los sucesos «obtener una carta del palo respectivo». Pondremos subíndices 1, 2 ó 3, según la extracción sea la primera, la segunda o la tercera. Designamos por E el suceso del enunciado en cada caso.

a) $E = P_1 \cap T_2 \cap C_3$

$$P(P_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(T_2) = \frac{13}{51}$$

$$P(C_3) = \frac{13}{50}$$

Por tanto,

$$P(E) = \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{13}{50} = \frac{169}{10.200}.$$

b) Sea X_i el suceso «obtener una determinada carta en la extracción i».

$$E = X_1 \cap X_2 \cap X_3$$

donde

$$P(X_1) = \frac{1}{52}$$

$$P(X_2) = \frac{1}{51}$$

$$P(X_3) = \frac{1}{50}$$

$$P(E) = \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} \cdot \frac{1}{50} = \frac{1}{132.600}.$$

c) Hemos calculado en el apartado *a*) la probabilidad que salieran tres cartas de diferentes palos en un orden determinado. El suceso E estará formado por la unión de todos los sucesos análogos al del apartado a) con todas las ordenaciones posibles (seis) de esos tres palos. Además formarán parte de esa unión los sucesos análogos cuando el palo «ausente» es también PICAS, o TRÉBOL o CORAZONES. Es decir E será la unión de 24 sucesos, todos ellos con la misma probabilidad que el calculado en *a*). Por tanto:

$$P(E) = \frac{24 \cdot 169}{10.200} = \frac{169}{425}.$$

4.15. *Se lanzan dos dados cuyas caras están numeradas de 1 a 6. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) La suma de las puntuaciones de ambos dados es 9.

b) En ambos dados la puntuación obtenida sea par.

c) La suma de las puntuaciones sea impar.

d) Las puntuaciones de ambos dados son diferentes.

e) Al menos en uno de los dados se obtiene un 2.

Solución

Sean $A_1, A_2, ..., A_6$ *los sucesos «obtener un* 1, *un* 2, ..., *un* 6 *en el primer dado» y análogamente* $B_1, B_2, ..., B_6$ en el segundo dado.

Sea C el suceso del enunciado en cada uno de los casos.

Observemos que para todo $i = 1, ..., 6$ $P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{6}$.

a) $P(C) = P(A_3) \cdot P(B_6) + P(A_4) \cdot P(B_5) + P(A_5) \cdot P(B_4) +$

$+ P(A_6) \cdot P(B_3) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

b) $C = (A_2 \cup A_4 \cup A_6) \cap (B_2 \cup B_4 \cup B_6)$.

Aplicando la propiedad distributiva obtenemos

$$C = (A_2 \cap B_2) \cup \cdots \cup (A_2 \cap B_6) \cup (A_4 \cap B_2) \cup \cdots \cup (A_6 \cap B_6).$$

Por tanto

$$P(C) = P(A_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A_6) \cdot P(B_6) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

c) $C = ((A_1 \cup A_3 \cup A_5) \cap (B_2 \cup B_4 \cup B_6)) \cup$

$\cup ((A_2 \cup A_4 \cup A_6) \cap (B_2 \cup B_3 \cup B_5))$.

Aplicando la propiedad distributiva:

$$C = (A_1 \cap B_2) \cup \cdots \cup (A_6 \cap B_5)$$

Por tanto,

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A_6) \cdot P(B_5) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

d) El suceso C es ahora el complementario del suceso $\bar{C}$ «obtener la misma puntuación en ambos dados».

$$\bar{C} = (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup \cdots \cup (A_6 \cap B_6)$$

$$P(\bar{C}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Por tanto,

$$P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

e) $C = (A_2 \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_6) \cup ((A_1 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_6) \cap B_2)$ ya que el suceso $(A_2 \cap B_2)$ ya está incluido en el primer paréntesis.

$$P(C) = P(A_2 \cap B_1) + \cdots + P(A_2 \cap B_6) + P(A_1 \cap B_2) + \cdots +$$

$$+ P(A_6 \cap B_2) = \frac{11}{36}.$$

4.16. *Una bolsa contiene seis bolas rojas y diez blancas. Una segunda bolsa contiene tres rojas y ocho negras. Se extrae una bola al azar de la primera bolsa y se introduce en la segunda. A continuación se extrae al azar una bola de la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea roja?*

Solución

Sean A_1 el suceso «obtener bola roja de la 1.ª bolsa».

A_2 el suceso «obtener bola blanca de la 1.ª bolsa».

B el suceso «obtener bola roja de la 2.ª bolsa».

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) =$$

$$= \frac{6}{16} \cdot \frac{4}{12} + \frac{10}{16} \cdot \frac{3}{12} = \frac{54}{16 \cdot 12} = \frac{9}{32}.$$

4.17. *Se tienen dos urnas, en la primera hay seis bolas blancas y dos negras; en la segunda hay tres bolas blancas y cuatro negras. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola al azar. Sabiendo que esta bola es negra, calcular la probabilidad de que sea de la segunda urna.*

Solución

Sean los sucesos:

A_1 «Elegir la primera urna».

A_2 «Elegir la segunda urna».

B «Elegir una bola negra».

Tenemos que calcular $P(A_2/B)$.

Por la fórmula de Bayes:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B/A_2)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)}$$

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(B/A_1) = \frac{1}{4}$$

$$P(B/A_2) = \frac{4}{7}.$$

Por tanto,

$$P(A_2/B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}} = \frac{16}{23}.$$

4.18. *En una fábrica hay tres máquinas A, B y C que producen, respectivamente, el 45 %, el 40 % y el 15 % de los tornillos que produce la fábrica. Los porcentajes de tornillos defectuosos que produce cada máquina son el 4 %, el 6 % y el 2 %. Seleccionando un tornillo al azar resultó ser defectuoso. Calcular la probabilidad de que haya sido producido por la máquina B.*

Solución

Sean A, B y C, respectivamente, los sucesos «El tornillo seleccionado es de A, de B o de C». Sea D el suceso «El tornillo seleccionado es defectuoso».

Tenemos que calcular la $P(B/D)$.

Por la fórmula de Bayes:

$$P(B/D) = \frac{P(D/B) \cdot P(B)}{P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C)} =$$

$$= \frac{\frac{6}{100} \cdot \frac{40}{100}}{\frac{4}{100} \cdot \frac{45}{100} + \frac{6}{100} \cdot \frac{40}{100} + \frac{2}{100} \cdot \frac{15}{100}} = \frac{240}{450} = \frac{8}{15}.$$

5. OPERACIONES BINARIAS

5.1. *En el conjunto $\mathbb{N}^*$ se define la siguiente ley de composición*

$$n * m = max\left(n, \frac{m(m+1)}{2}\right).$$

Demostrar que es una ley de composición interna. Estudiar si verifica la propiedad asociativa. ¿Existe elemento neutro? ¿Existen opuestos?

Solución

Para que sea interna $\max\left(n, \frac{m(m+1)}{2}\right)$ debe pertenecer a $\mathbb{N}^*$. Efectivamente lo es, ya que $n \in \mathbb{N}^*$ y $\frac{m(m+1)}{2}$ también pertenece a $\mathbb{N}^*$ puesto que o bien m o bien $m+1$ es un número par.

Veamos la propiedad asociativa:

$$((n * m) * p) = \max\left(\max\left(n, \frac{m(m+1)}{2}\right), \frac{p(p+1)}{2}\right)$$

$$(n * (m * p)) = \max\left(n, \frac{\left(\max\left(m, \frac{p(p+1)}{2}\right)\right)\left(\max\left(m, \frac{p(p+1)}{2}\right) + 1\right)}{2}\right)$$

A primera vista no parece que deban ser iguales en general. Veamos un ejemplo numérico.

$$((5*4)*7)) = \max\left(\max\left(5, \frac{4(4+1)}{2}\right), \frac{7(7+1)}{2}\right) = \max(10,28) = 28$$

$$(5*(4*7)) = \max\left(5, \frac{(\max(4,28))(\max(4,28)+1)}{2}\right) =$$

$$= \max(5,406) = 406.$$

Por tanto no es asociativa.

Si existiera elemento neutro e debería verificar que $n*e = e*n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$n*e = \max\left(n, \frac{e(e+1)}{2}\right) = n.$$

De aquí deducimos que $\frac{e(e+1)}{2}$ ha de ser menor o igual que n para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Necesariamente $e = 1$.

Por otra parte:

$$e*n = \max\left(e, \frac{n(n+1)}{2}\right) = n.$$

Como $e = 1$ entonces $e*n = \frac{n(n+1)}{2}$ que, en general, es distinto de n.

Por tanto no existe elemento neutro para esta ley de composición.

5.2. *Sean X e Y dos conjuntos no vacíos, $\mathscr{F}(X, Y)$ el conjunto de las aplicaciones de X en Y. Supongamos que en Y está definida una ley* *de composición que designamos por $\cdot$. Se define en $\mathscr{F}(X, Y)$ una operación $*$ mediante*

$$(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \textit{para todo } x \textit{ de } X.$$

Demostrar,

a) Si $\cdot$ es asociativa o conmutativa, también lo es, respectivamente, la operación $*$.

b) Si existe un elemento neutro $e \in Y$ entonces la aplicación $f_e \in \mathscr{F}(X, Y)$ definida $f_e(x) = e$ para todo $x \in X$, es elemento neutro para la operación $*$ en $\mathscr{F}(X, Y)$.

Solución

a) Supongamos que $\cdot$ es asociativa, entonces para todo $x \in X$:

$$[(f * g) * h](x) = (f * g)(x) \cdot h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) =$$
$$= f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = f(x) \cdot ((g * h)(x)) = [f * (g * h)](x)$$

por tanto, $*$ es asociativa.

Supongamos que $\cdot$ es conmutativa, entonces para todo $x \in X$:

$$(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = (g * f)(x)$$

así pues, $*$ es conmutativa.

b) Tenemos que probar que para todo $g \in \mathscr{F}(X, Y)$ se verifica que $f_e * g = g * f_e = g$. Para todo $x \in X$ se tiene,

$$(f_e * g)(x) = f_e(x) \cdot g(x) = e \cdot g(x) = g(x)$$
$$(g * f_e)(x) = g(x) \cdot f_e(x) = g(x) \cdot e = g(x)$$

Por tanto, f_e es elemento neutro para la operación $*$.

5.3. *a) Dado un anillo $(A, +, \cdot)$ demostrar que la operación $*$ definida en A mediante $x * y = xy - yx$ es distributiva respecto de la suma.*

b) Demostrar que en un cuerpo $(K, +, \cdot)$ el producto es distributivo respecto de la diferencia.

Solución

a) Para todo $x, y, z \in A$ tenemos

$$
\begin{aligned}
x*(y+z) &= x(y+z)-(y+z)x && \text{(Definición de } *\text{)}\\
&= xy+xz-(yx+zx) && \text{(Prop. distributiva)}\\
&= xy+xz-yx-zx && \\
&= xy-yx+xz-zx && \text{(Prop. conmutativa de } +\text{)}\\
&= (x*y)+(x*z) && \text{(Definición de } *\text{)}
\end{aligned}
$$

Obsérvese que si la operación $\cdot$ es conmutativa, entonces $x*y$ es cero cualquiera que sean x e y.

b) Para todo $x, y, z \in k$ tenemos

$$
\begin{aligned}
x(y-z) &= x(y+(-z)) && \text{(Por definición de opuesto)}\\
&= xy+x(-z) && \text{(Propiedad distrib. de } \cdot \text{ respecto de } +\text{)}\\
&= xy+(-xz) && \\
&= xy-xz && \text{(Por definición de diferencia)}
\end{aligned}
$$

5.4. *Dado un grupo $(G, *)$, sea H el subconjunto de G formado por todos los elementos y tales que $x * y = y * x$ para todo $x \in G$. Probar que H es un subgrupo de G.*

Solución

Un subconjunto H de un grupo G es un subgrupo si se verifica que para todo par de elementos h_1, h_2 de H el elemento $h_1 h_2^{-1}$ pertenece a H. Vamos a aplicarlo a nuestro problema.

Sean $y, z \in H$ tenemos que comprobar que $y * z^{-1} \in H$, es decir hay que comprobar que el elemento $y * z^{-1}$ conmuta con todos los elementos de G. Para todo $x \in G$ tenemos

$$\begin{aligned} x * (y * z^{-1}) &= (x * y) * z^{-1} = && \text{(Propiedad asociativa)} \\ &= (y * x) * z^{-1} = && \text{(Por ser } y \in H) \\ &= y * (x * z^{-1}) = && \text{(Propiedad asociativa)} \\ &= y * (z * x^{-1})^{-1} = && \\ &= y * (x^{-1} * z)^{-1} = && \text{(Por ser } z \in H) \\ &= y * (z^{-1} * x) = && \\ &= (y * z^{-1}) * x && \text{(Propiedad asociativa)} \end{aligned}$$

Así pues $y * z^{-1}$ conmuta con todos los elementos de G y de aquí, $y * z^{-1} \in H$. Por tanto $(H, *)$ es un subgrupo.

5.5. *Estudiar si $\mathbb{R}$ con la operación:*

$$a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$$

es un grupo.

Solución

Propiedad asociativa:

$$(a * b) * c = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^3 + b^3})^3 + c^3} = \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3}$$
$$a * (b * c) = \sqrt[3]{a^3 + (\sqrt[3]{b^3 + c^3})^3} = \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3}$$

Elemento unidad:

$$a * e = e * a = a \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$\sqrt[3]{a^3 + e^3} = a, \quad \text{por tanto} \quad e = 0.$$

Elemento inverso:

$$a * \bar{a} = \bar{a} * a = e$$

$$\sqrt[3]{a^3 + \bar{a}^3} = 0, \quad \text{por tanto} \quad \bar{a} = -a$$

Por ser la suma de números reales conmutativa, lo es la operación $*$.

Por tanto $(\mathbb{R}, *)$ es un grupo abeliano.

5.6. *Estudiar si $X = \{a + b\sqrt{7},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, con la suma y el producto usuales de los números reales, es un anillo. ¿Es un cuerpo?*

Solución

Puesto que las operaciones en X son las usuales de los números reales, se satisfacen automáticamente las propiedades asociativa de la suma y del producto, la conmutativa de ambas y la distributiva del producto respecto de la suma.

Además, tanto la suma como el producto de dos elementos de X, es otro elemento de X:

$$(a + b\sqrt{7}) + (c + d\sqrt{7}) = a + c + (b + d)\sqrt{7} \text{ que pertenece a } X$$

$$(a + b\sqrt{7}) \cdot (c + d\sqrt{7}) = ac + 7bd + (ad + bc)\sqrt{7} \text{ que pertenece a } X.$$

Comprobemos que tanto el 0 como el 1 (elementos neutro y unidad, respectivamente) están en X:

$$0 = 0 + 0\sqrt{7}$$
$$1 = 1 + 0\sqrt{7}.$$

El elemento opuesto de $a + b\sqrt{7}$, el $-a - b\sqrt{7}$ pertenece a X.

Así pues, $(X, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con elemento unidad.

Para que sea un cuerpo es necesario que el inverso de cada elemento de X pertenezca a X:

$$(a + b\sqrt{7}) \cdot (\bar{a} + \bar{b}\sqrt{7}) = 1$$

$$(\bar{a} + \bar{b}\sqrt{7}) = \frac{1}{a + b\sqrt{7}} = \frac{a - b\sqrt{7}}{(a + b\sqrt{7})(a - b\sqrt{7})} =$$
$$= \frac{a}{a^2 - 7b^2} - \frac{b}{a^2 - 7b^2}\sqrt{7}$$

Ahora bien, $\dfrac{a}{a^2 - 7b^2}$ no pertenece necesariamente a $\mathbb{Z}$. Por ejemplo, si $a = 3$ y $b = 1$:

$$\frac{3}{9 - 7} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Por tanto, $(X, +, \cdot)$ no es un cuerpo.

5.7. *Hallar todos los subgrupos de* $(\mathbb{Z}/(10), +)$.

Solución

Escribamos la tabla de esta operación.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	9
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$

Como el orden de un subconjunto es divisor del orden del grupo, los posibles subgrupos serán de órdenes 1, 2, 5 y 10.

El elemento neutro pertenece a todo subgrupo H y dado un elemento $\bar{x} \in H$ su opuesto debe pertenecer a H. Escribimos los opuestos de cada elemento:

$\bar{1}$ y $\bar{9}$
$\bar{2}$ y $\bar{8}$
$\bar{3}$ y $\bar{7}$
$\bar{4}$ y $\bar{6}$
$\bar{5}$ y $\bar{5}$

Subgrupos de orden 1:

Sólo el subgrupo trivial $\{\bar{0}\}$

Subgrupos de orden 2:

Estarán formados por el elemento neutro y otro elemento cuyo opuesto sea él mismo. En $\mathbb{Z}/(10)$ sólo el elemento $\bar{5}$ satisface esta condición. Así pues $\{\bar{0}, \bar{5}\}$.

Subgrupos de orden 5:

Estos posibles subgrupos han de contener el elemento neutro y otros cuatro elementos (dos elementos y sus opuestos) con la condición de que al operar dos de ellos el resultado también pertenezca al subgrupo. Observamos que el $\bar{5}$ no puede pertenecer ya que no existen más elementos que sean opuestos de sí mismos y por tanto nos quedarían tres elementos, lo que impide que haya dos parejas de opuestos.

Supongamos que el $\bar{1}$ pertenece a un subgrupo de orden 5, por tanto el $\bar{9}$ también. Ha de pertenecer el $\bar{2}$ ya que $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$ y por tanto el $\bar{8}$, pero también el $\bar{3} = \bar{1} + \bar{2}$ y el subgrupo tendrá más de 5 elementos.

Igualmente ocurre si el $\bar{3}$ pertenece, y por tanto el $\bar{7}$, como $\bar{6} = \bar{3} + \bar{3}$ ha de estar en el subgrupo. Pero $\bar{3} + \bar{6} = \bar{9}$ y por tanto el $\bar{1}$ ha de pertenecer y estamos en el caso anterior.

Supongamos que el $\bar{2}$, y por tanto el $\bar{8}$ pertenecen. También ha de estar en el subgrupo el $\bar{4} = \bar{2} + \bar{2}$ y por tanto el $\bar{6}$. Observemos que ya están todos puesto que

$\bar{2}+\bar{2}=\bar{4}$
$\bar{2}+\bar{4}=\bar{6}$
$\bar{2}+\bar{6}=\bar{8}$
$\bar{2}+\bar{8}=\bar{0}$
$\bar{4}+\bar{4}=\bar{8}$
$\bar{4}+\bar{6}=\bar{0}$
$\bar{4}+\bar{8}=\bar{2}$
$\bar{6}+\bar{6}=\bar{2}$
$\bar{6}+\bar{8}=\bar{4}$
$\bar{8}+\bar{8}=\bar{6}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$

Así pues el subgrupo es $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$.

Subgrupos de orden 10:

El propio grupo $\mathbb{Z}/(10)$.

5.8. *Demostrar que el conjunto $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ de aplicaciones biyectivas de $X = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ en sí mismo, definidas para todo $x \in X$:*

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = 1/x \qquad f_3(x) = 1 - x$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1-x} \quad f_5(x) = \frac{x-1}{x} \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

con la composición de aplicaciones es un grupo. Estudiar si el subconjunto $H = \{f_1, f_4, f_5\}$ es un subgrupo del anterior.

Solución

La propiedad asociativa se cumple ya que la composición de aplicaciones es asociativa en general.

La aplicación f_1 es elemento neutro ya que para todo $x \in X$ y para todo f_i dando $i = 2, 3, 4, 5, 6$ se tiene

$$(f_1 \circ f_i)(x) = f_1(f_i(x)) = f_i(x)$$
$$(f_i \circ f_1)(x) = f_i(x)$$

Veamos ahora que cada elemento f_i de G tiene inverso f_i^{-1}:

$$f_2^{-1} = f_2 \ ; \ f_3^{-1} = f_3 \ ; \ f_4^{-1} = f_5 \ ; \ f_5^{-1} = f_4 \ \text{y} \ f_6^{-1} = f_6.$$

Para todo $x \in X$ tenemos

$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x. \text{ Así pues, } f_2 \circ f_2 = f_1$$

$$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3(1 - x) = 1 - (1 - x) = x. \text{ Por tanto } f_3 \circ f_3 = f_1$$

$$(f_4 \circ f_5)(x) = f_4(f_5(x)) = f_4\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = x$$

$$(f_5 \circ f_4)(x) = f_5(f_4(x)) = f_5\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = x$$

Así pues, $f_4 \circ f_5 = f_5 \circ f_4 = f_1$ y por tanto f_4 y f_5 son mutuamente inversos.

$$(f_6 \circ f_6)(x) = f_6(f_6(x)) = f_6\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = x$$

y de aquí $f_6 \circ f_6 = f_1$.

Por tanto $(G, \circ)$ es un grupo, no abeliano:

$$(f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = f_2(1 - x) = \frac{1}{1 - x} = f_4(x)$$

$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3(f_2(x)) = f_3(1/x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x} = f_5(x)$$

H es un subgrupo de G ya que contiene el elemento unidad f_1 y para cada elemento de H existe su inverso, ya que hemos visto que f_4 y f_5 son mutuamente inversos.

5.9. *Demostrar que si* $(A, +, \cdot)$ es un anillo, el conjunto $A \times A$ *con las leyes de composición*

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \circ (c, d) = (a \cdot c, 0)$$

donde 0 *es el elemento neutro de* A, *es también un anillo. Si, en particular,* $(A, +, \cdot)$ *es un cuerpo, ¿es también* $(A \times A, *, \circ)$ *un cuerpo?*

Solución

Primero estudiamos si $(A \times A, *)$ es un grupo abeliano. Por la definición de la operación $*$ tenemos que al ser $+$ conmutativa y asociativa, también lo es $*$.

El elemento neutro de $(A \times A, *)$ es el $(0, 0)$ ya que:

$(a, b) * (0, 0) = (a, b) = (0, 0) * (a, b)$ para todo $(a, b) \in A \times A$.

El elemento $(-a, -b)$ es el opuesto de (a, b) ya que:

$$(a, b) * (-a, -b) = (0, 0) = (-a, -b) * (a, b)$$

Por tanto $(A \times A, *)$ es grupo abeliano.

Estudiamos ahora $(A \times A, \circ)$. Por la definición de la operación $\circ$ se tiene que es asociativa al serlo $\cdot$.

Queda estudiar si la operación $\circ$ es distributiva respecto de la operación $*$:

$$(a, b) \circ ((c, d) * (e, f)) = (a, b) \circ (c + e, d + f) = (a \cdot c + a \cdot e, 0)$$

$$[(a, b) \circ (c, d)] * [(a, b) \circ (e, f)] = (a \cdot c, 0) * (a \cdot e, 0) = \\ = (a \cdot c + a \cdot e, 0)$$

Así pues, $(A \times A, *, \circ)$ es un anillo, y será conmutativo si lo es la operación $\cdot$.

Aunque $(A, +, \cdot)$ sea un cuerpo, $(A \times A, *, \circ)$ no puede serlo, ya que por la definición de $\circ$ es imposible que exista elemento unidad puesto que la segunda componente del producto siempre es cero.

5.10. *En el conjunto $X = \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ se define la operación*

$$(r, s) * (r', s') = (r \cdot r', sr' + s')$$

Estudiar si $(X, *)$ es un grupo.

Solución

Evidentemente la operación es interna.

Propiedad asociativa:

$$((r, s) * (r', s')) * (r'', s'') = (r \cdot r', sr' + s') * (r'', s'') = \\ = (r \cdot r' \cdot r'', sr'r'' + s'r'' + s'')$$

$$(r, s) * ((r', s') * (r'', s'')) = (r, s) * (r'r'', s'r'' + s'') = \\ = (rr'r'', sr'r'' + s'r'' + s'')$$

Luego $*$ cumple la propiedad asociativa.

Elemento neutro:

$$(r, s) * (p, q) = (p, q) * (r, s) = (r, s) \quad \text{para todo} \quad (r, s) \in X$$

$$(r, s) * (p, q) = (rp, sp + q) = (r, s)$$
$$(p, q) * (r, s) = (pr, qr + s) = (r, s)$$

Obtenemos $rp = pr = r$ para todo $r \in \mathbb{Q}^*$, por tanto $p = 1$ y $sp + q = qr + s = s$. Como $p = 1$, necesariamente $q = 0$.

Así pues, el elemento $(1, 0)$ es el elemento neutro.

Elementos simétricos:

$$(r, s) * (\bar{r}, \bar{s}) = (\bar{r}, \bar{s}) * (r, s) = (1, 0) \quad \text{para todo} \quad (r, s) \in X.$$

$$(r, s) * (\bar{r}, \bar{s}) = (r\bar{r}, s\bar{r} + \bar{s}) = (1, 0)$$
$$(\bar{r}, \bar{s}) * (r, s) = (\bar{r}r. \bar{s}r + s) = (1, 0)$$

Obtenemos $r\bar{r} = \bar{r}r = 1$, por tanto $\bar{r} = r^{-1} \in \mathbb{Q}^*$, y $s\bar{r} + \bar{s} = $ $= \bar{s}r + s = 0$. Como $\bar{r} = 1/r$ podemos escribir $\frac{s}{r} + \bar{s} = \bar{s}r + s = 0$, por tanto $\bar{s} = \frac{-s}{r}$.

Así pues todo elemento (r, s) tiene simétrico, el elemento $(1/r, -s/r)$.

Por tanto $(X, *)$ es un grupo.

Observemos que no es abeliano, es decir la operación $*$ no es conmutativa. Por ejemplo,

$$(3, 2) * (5, 7) = (15, 17)$$
$$(5, 7) * (3, 2) = (15, 23)$$

5.11. *Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con elemento unidad.*

Decimos que un elemento $x \in A$ es nilpotente si existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que x^n es el elemento neutro $0 \in A$.

Demostrar que la suma y el producto de dos elementos nilpotentes son nilpotentes y que si x es nilpotente el elemento $1 - x$ es inversible.

Solución

De la definición de nilpotente se deduce que para todo $m \in \mathbb{N}$ $m > n$ se tiene $x^m = 0$. Supondremos en lo que sigue que n es el mínimo número natural tal que $x^n = 0$.

Sean $x, y \in A$ elementos nilpotentes. Por tanto existen dos números naturales n y m tales que $x^n = 0$ e $y^m = 0$.

El producto xy es nilpotente ya que existe $\min\{n, m\}$ (supongamos que es n) tal que

$$
\begin{aligned}
(xy)^n &= \overbrace{xyxy\cdots xy}^{n \text{ veces}} = && \text{(Por la prop. conmutativa)} \\
&= \overbrace{xx\cdots x}^{n \text{ veces}}\ \overbrace{yy\cdots y}^{n \text{ veces}} = && \text{(Por la prop. asociativa)} \\
&= x^n y^n = 0 \cdot y^n = 0.
\end{aligned}
$$

Estudiamos ahora la suma. Veamos que $(x + y)^{n+m}$ es cero. Para ello desarrollamos por la fórmula del binomio de Newton:

$$
(x + y)^{n+m} = \binom{n+m}{0} x^{n+m} + \binom{n+m}{1} x^{n+m-1} y + \cdots +
$$

$$
+ \binom{n+m}{m} x^n y^m + \cdots + \binom{n+m}{n+m} y^{n+m}
$$

Los $m + 1$ primeros términos son cero ya que x está elevado a una potencia mayor o igual que n. Los siguientes términos son cero ya que y está elevado a una potencia mayor que m.

Por tanto todos los términos son nulos. Así pues $(x + y)^{n+m} = 0$ y $(x + y)$ es un elemento nilpotente.

El elemento $1 - x$ será inversible si existe otro elemento en A que multiplicado por $1 - x$ sea el elemento unidad.

Como x es nilpotente existe un número natural n tal que $x^n = 0$ y para todo $k < n$ $x^n \neq 0$.

Efectuemos la división:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-x \\ \cline{2-2}
\underline{-1 + x} & 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \\
\quad x & \\
\quad \underline{-x + x^2} & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad \underline{-x^2 + x^3} & \\
\qquad\quad x^3 & \\
\qquad\quad \vdots & \\
\qquad\qquad x^{n-1} & \\
\qquad\qquad \underline{-x^{n-1} + x^n} & \\
\qquad\qquad\quad x^n = 0 \text{ por ser x nilpotente} &
\end{array}
$$

Así pues el elemento $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$, que evidentemente pertenece a A, es el inverso de $1 - x$.

6. NUMEROS RACIONALES Y REALES

6.1. *Mediante la definición de límite, pruébese que las sucesiones*

$$a)\ (a_n) = \left(\frac{n-1}{2n}\right) \quad y \quad b)\ (b_n) = \left(\frac{3n+2}{n-1}\right).$$

son sucesiones convergentes.

Solución

a) Tenemos que probar que $a = \lim (a_n)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$.

Para la sucesión (a_n): $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = \dfrac{1}{2}$. Veámoslo:

$$\left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

lo cual es cierto para todo $n \geqslant \dfrac{1}{2\varepsilon}$.

b) Análogamente:

$$\lim_{n \to \infty} (b_n) = 3:$$

$$\left| \frac{3n+2}{n-1} - 3 \right| = \left| \frac{3n+2-3n+3}{n-1} \right| = \left| \frac{5}{n-1} \right| = \frac{5}{n-1} < \varepsilon$$

lo cual es cierto para todo $n \geqslant \frac{5}{\varepsilon} + 1$.

6.2. *Demuéstrese, mediante la definición de límite, que no existe el límite de la sucesión de números racionales definida por*

$$a_n = 1 \quad \textit{si } n \textit{ es impar}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \textit{si } n \textit{ es par.}$$

Solución

Supongamos que existe el límite a de la sucesión (a_n). Por definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 natural tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$.

Sea, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ y consideremos los $n \geqslant n_0$ (n impar)

$|a_n - a| < \frac{1}{4}$ es equivalente a $|1 - a| < \frac{1}{4}$, por tanto a es un número mayor que 3/4 y menor que 5/4. Pero esto implica que para todo $n > n_0$ (n par) $|a_n - a|$ es necesariamente mayor que $\varepsilon = 1/4$.

Por tanto no existe $\lim_{n \to \infty} (a_n)$.

6.3. *Calcúlese el límite cuando $n \to \infty$ de las siguientes sucesiones:*

a) $(a_n) = \left(\dfrac{(n^2+3)(n^2-4)}{(n+2)^2(3n-2)^2}\right)$

b) $(b_n) = (\sqrt{n^4 - 6n^2 + 9} - 2n^2)$

c) $(c_n) = \left(\dfrac{n^2-4}{n+2} - \dfrac{n^2-2n-3}{n+1}\right).$

d) $(d_n) = (\sqrt{n^2+6n} - \sqrt{n^2+2n-1})$

Solución

a) $$(a_n) = \left(\frac{n^4 - n^2 - 12}{(n^2+4n+4)(9n^2+4-12n)}\right) =$$

$$= \left(\frac{n^4 - n^2 - 12}{9n^4 + 24n^3 - 8n^2 - 32n + 16}\right).$$

Dividiendo numerador y denominador por n^4 tenemos

$$(a_n) = \left(\frac{1 - 1/n^2 - 12/n^4}{9 + 24/n - 8/n^2 - 32/n^3 + 16/n^4}\right).$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = \dfrac{1}{9}.$

b) Observemos que $n^4 - 6n^2 + 9$ es un cuadrado perfecto, es decir $n^4 - 6n^2 + 9 = (n^2-3)^2$. Podemos escribir

$$(b_n) = (\sqrt{(n^2-3)^2} - 2n^2) = (n^2 - 3 - 2n^2) = (-n^2 - 3).$$

Esta sucesión no tiene límite cuando $n \to \infty$ ya que tiende a $-\infty$. Se dice entonces que es divergente.

c) $(c_n) = \left(\dfrac{(n-2)(n+2)}{n+2} - \dfrac{(n+1)(n-3)}{n+1}\right) = (n-2-n+3) = 1.$

Al ser una sucesión constante igual a 1, su límite es 1.

d) Nos interesa eliminar las raíces. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión, es decir escribimos

$$(d_n) = \left(\frac{(\sqrt{n^2+6n} - \sqrt{n^2+2n-1})(\sqrt{n^2+6n} + \sqrt{n^2+2n-1})}{\sqrt{n^2+6n} + \sqrt{n^2+2n-1}}\right) =$$

$$= \left(\frac{n^2+6n-(n^2+2n-1)}{\sqrt{n^2+6n}+\sqrt{n^2+2n-1}}\right) = \left(\frac{4n+1}{\sqrt{n^2+6n}+\sqrt{n^2+2n-1}}\right).$$

Dividimos ahora el numerador y el denominador por n. Recuérdese que al haber raíces cuadradas en el denominador debemos dividir los radicandos por n^2:

$$(d_n) = \left(\frac{4 + 1/n}{\sqrt{1 + 6/n} + \sqrt{1 + 2/n - 1/n^2}}\right).$$

Por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} (d_n) = \frac{4}{2} = 2.$$

6.4. *Calcúlese el límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión*

$$(a_n) = \left(\frac{\sqrt{n^2+9} - \sqrt{n^2-8}}{\sqrt{n^2+9} + \sqrt{n^2-8}}\right).$$

Solución

Dividimos por n el numerador y el denominador:

$$(a_n) = \left(\frac{\sqrt{1 + 9/n^2} - \sqrt{1 - 8/n^2}}{\sqrt{1 + 9/n^2} + \sqrt{1 - 8/n^2}}\right).$$

Por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \frac{0}{2} = 0.$$

6.5. *Calcúlese el límite cuando* $n \to \infty$ *de la sucesión*

$$(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right).$$

Solución

Escribamos explícitamente los primeros términos de la sucesión:

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

$$a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right) + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

Observamos que a_n parece tener la forma $\frac{n}{n+1}$; para probarlo debemos utilizar el principio de inducción:

1.º) para $n = 1$ es cierto $a_1 = \frac{1}{1+1}$,

2.º) supongámoslo cierto para n, es decir $a_n = \frac{n}{n+1}$,

3.º) debemos probar que se verifica para $n + 1$:

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Así pues $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)$, por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = 1$.

6.6. *Sea c un número racional $|c| < 1$. Demuéstrese que la sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + c$, $a_3 = 1 + c + c^2$, ..., $a_n = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1}$, ..., es de Cauchy y calcúlese su límite.*

Solución

Como toda sucesión convergente de números racionales es de Cauchy, vamos a ver que (a_n) es convergente calculando su límite.

Mediante la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica podemos escribir

$$a_n = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = \frac{1-c^n}{1-c}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-c^n}{1-c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-c} - \lim \frac{c^n}{1-c}$$

La primera es una sucesión constante, por tanto su límite es $\frac{1}{1-c}$.

La segunda tiene límite 0, ya que $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ cuando $|c| < 1$.

Así pues $\lim_{n\to\infty} \frac{1-c^n}{1-c} = \frac{1}{1-c}$.

6.7. *Dados dos números reales positivos* x e y *tales que* $x + y = 1$ *demuéstrese que* $\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\left(1 + \frac{1}{2y}\right) \geqslant 4$.

Solución

Llamemos A a $\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\left(1 + \frac{1}{2y}\right)$. Por la propiedad distributiva tenemos,

$$A = \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{4xy}\right).$$

Como $y = 1 - x$ podemos escribir,

$$A = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{4(1-x)x} =$$

$$= \frac{4(1-x)x + 2(1-x) + 2x + 1}{4(1-x)x} =$$

$$= \frac{4x - 4x^2 + 2 - 2x + 2x + 1}{4x - 4x^2} =$$

$$= \frac{-4x^2 + 4x + 3}{-4x^2 + 4x}.$$

Entonces $A \geqslant 4$ si y sólo si $-4x^2 + 4x + 3 \geqslant -16x^2 + 16x$ o bien si $12x^2 - 12x + 3 \geqslant 0$ que dividiendo por 3 queda

$$4x^2 - 4x + 1 \geqslant 0.$$

Resolviendo la ecuación $4x^2 - 4x + 1 = 0$, obtenemos $x = \frac{1}{2}$ (solución única). Por tanto, para $x = y = \frac{1}{2}$ se obtiene la igualdad y para el resto de los valores de x obtenemos

$$4x^2 - 4x + 1 > 0 \text{ y por tanto } A \geqslant 4.$$

6.8. *Resolver la ecuación* $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 2x = 5.$

Solución

Llamemos y a $x - \frac{1}{x}$, entonces $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ y podemos escribir la ecuación original como

$$y^2 + 2 + 2y = 5$$

o bien,

$$y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2 = 4.$$

Por tanto $y + 1 = 2$ ó $y + 1 = -2$, de donde obtenemos $y = 1$ ó $y = 3$.

Como $y = x - \dfrac{1}{x}$ tenemos,

Si $y = 1$: $x^2 - x - 1 = 0$ y resolviendo esta ecuación de segundo grado, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Si $y = -3$: $x^2 + 3x - 1 = 0$ y resolviendo esta ecuación obtenemos $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

6.9. *Demostrar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$$

Solución

$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$ es equivalente a escribir

$$-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b|$$

Como

$|b| = |b - a + a| \leqslant |b - a| + |a|$ por la desigualdad triangular

Entonces,

$$-|b - a| = -|a - b| \leqslant |a| - |b|. \qquad [1]$$

Como $\qquad |a| = |a - b + b| \leqslant |a - b| + |b|$

$$|a| - |b| \leqslant |a - b| + |b| - |b| = |a - b|. \qquad [2]$$

De [1] y [2] obtenemos la desigualdad que queríamos demostrar.

6.10. *Dados a y b números reales positivos, demuéstrese que existe un número natural k, tal que $b < k \cdot a$.*

Solución

Si $b < a$, entonces existe el $1 \in \mathbb{N}$ tal que $b < a \cdot 1$.

Supongamos que $a < b$, es decir $b - a > 0$.

Siempre existe un natural k, tal que $b - a < k$, es decir $b < k \cdot a$.

6.11. *Demuéstrese que para todo número real positivo a existe un número natural k, tal que $0 < \frac{1}{k} < a$.*

Solución

Si $a > 1$ entonces existe $k = 1$ tal que $0 < \frac{1}{1} < a$.

Supongamos que $a \leqslant 1$. Por el problema anterior, tomando $b = 1$, existe un k natural tal que $1 < ka$ y, por tanto, $\frac{1}{k} < a$.

6.12. *Demuéstrese que dados dos números reales distintos a y b con $a < b$, siempre existe un número racional q tal que $a < q < b$.*

Solución

Si $a < 0 < b$ entonces el $0 \in \mathbb{Q}$ verifica la propiedad.

Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}^+$. Como $a < b$ entonces $0 < b - a$. Por el problema anterior existe un número natural k, tal que $0 < \frac{1}{k} < b - a$. Por tanto

$$\frac{1}{k} < a + \frac{1}{k} < b \qquad [1]$$

Por el problema 6.10 existe un número natural n, tal que $b < \frac{n}{k}$.

Consideremos todos los números naturales n tales que $b < \frac{n}{k}$ y sea n_0 el mínimo de ellos. Entonces

$$\frac{n_0 - 1}{k} < b < \frac{n_0}{k} \qquad [2]$$

Vamos a ver que $\frac{n_0 - 1}{k}$ es el número q que estamos buscando.

Para ello hay que comprobar que $a < \frac{n_0 - 1}{k}$.

Supongamos que $\frac{n_0 - 1}{k} \leqslant a$ entonces $\frac{n_0 - 1}{k} + \frac{1}{k} \leqslant a + \frac{1}{k}$ y de aquí $\frac{n_0}{k} \leqslant a + \frac{1}{k}$.

De [1] deducimos que $\frac{n_0}{k} < b$ lo cual contradice [2]. Por tanto $a < \frac{n_0 - 1}{k} < b$.

Supongamos ahora que $a, b \in \mathbb{R}^-$ entonces $-b$ y $-a$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$ con $-b < -a$. Aplicando lo anterior obtenemos un número racional q, tal que $-b < q < -a$. Por tanto, $-q \in \mathbb{Q}$ y verifica $a < -q < b$.

En el caso particular de que a ó b fueran 0 bastaría aplicar el problema 6.11.

Si $a = 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{k} < b$.

Si $b = 0$, entonces $-a \in \mathbb{R}^+$ y existe k, tal que $0 < \frac{1}{k} < -a$ y por tanto $a < \frac{-1}{k} < 0$.

6.13. *Demuéstrese que dados dos números reales positivos a y b, tales que $a < b$, existe un número racional r tal que $a < r^2 < b$.*

Solución

Como $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces existen $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}^+$ con $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Aplicando el problema anterior a ambos, se obtiene $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{a} < r < \sqrt{b}$ y, por tanto, $a < r^2 < b$ con $r^2 \in \mathbb{Q}$.

7. NUMEROS COMPLEJOS

7.1. *Dados los números complejos* $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = -1 + 4i$. *Hállese*

$$\bar{z}_1,\ |z_2|,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2},\ \overline{z_1 + z_2} \text{ y } |z_1 - z_2|.$$

Solución

$$\bar{z}_1 = 2 + i$$
$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2} = \sqrt{17}$$

donde se toma la raíz positiva,

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - i)(-1 + 4i) = -2 + i + 8i - 4i^2 = 2 + 9i,$$

ya que $i^2 = -1$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(2-i)(-1-4i)}{(-1+4i)(-1-4i)} = \frac{-2+i-8i+4i^2}{1+16} = \frac{-6}{17} - \frac{7}{17}i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (\overline{1 + 3i}) = 1 - 3i$$

$$|z_1 - z_2| = |3 - 5i| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

7.2. *Determinar a y b para que*

$$a(2 + i) + b(4 + 3i) = -3i.$$

Solución

Efectuamos la suma del primer miembro de la igualdad:

$$(2a + 4b) + (a + 3b)i = -3i.$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias de ambos miembros, obtenemos

$$\begin{aligned} 2a + 4b &= 0 \\ a + 3b &= -3. \end{aligned}$$

De la primera obtenemos $a = -2b$. Sustituyendo en la segunda:

$$b = -3$$

y por tanto $a = 6$.

7.3. *Calcular x para que el módulo de*

$$z = (x - i) - (4 - 2i) + (4 + xi)$$

sea 5.

Solución

$$\begin{aligned} z &= x + (1 + x)i \\ |z| &= \sqrt{x^2 + (1 + x)^2}. \end{aligned}$$

Como $|z|$ debe ser 5 tenemos

$$x^2 + 1 + 2x + x^2 = 25$$

o bien,

$$2x^2 + 2x - 24 = 0.$$

Simplificando

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación de 2.° grado obtenemos $x=3$ y $x=-4$. Así pues $z = 3 + 4i$ o bien $z = -4 - 3i$. En ambos casos $|z|$ es 5.

7.4. *Calcúlese* $(2 - 3i)^4$.

Solución

Por el binomio de Newton desarrollamos $(2-3i)^4$:

$$(2-3i)^4 = \binom{4}{0}2^4 - \binom{4}{1}2^3\cdot(3i) + \binom{4}{2}2^2\cdot(3i)^2 - \binom{4}{3}2\cdot(3i)^3 +$$

$$+ \binom{4}{4}(3i)^4 = 16 - 96i + 216i^2 - 216i^3 + 81i^4.$$

Como $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$, tenemos

$$(2 - 3i)^4 = 16 - 96i - 216 + 216i + 81 = -119 + 120i.$$

7.5. *Calcular* $z = \dfrac{i^{302}}{i^{485} - i^{274}}$.

Solución

Como sabemos, las potencias de i son,

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$$
$$i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad \dots$$

Podemos escribir entonces,

$$i^{302} = i^{4\cdot 75+2} = (i^4)^{75}\cdot i^2 = 1^{75}\cdot(-1) = -1$$
$$i^{485} = i^{4\cdot 121+1} = (i^4)^{121}\cdot i = i$$
$$i^{274} = i^{4\cdot 68+2} = (i^4)^{68}\cdot i^2 = -1.$$

Así pues,

$$z = \frac{-1}{i-(-1)} = \frac{-1}{i+1} = \frac{-(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

7.6. *Calcúlese* $z = \dfrac{(3+i)(2-3i)}{(1-2i)(-2+4i)}$.

Solución

Calculamos en primer lugar los productos del numerador y del denominador.

$$z = \frac{6+2i-9i-3i^2}{-2+4i+4i-8i^2} = \frac{9-7i}{6+8i}.$$

Multiplicamos ahora el numerador y el denominador por el conjugado del denominador,

$$z = \frac{(9-7i)(6-8i)}{(6+8i)(6-8i)} = \frac{54-42i-72i+56i^2}{36+64} =$$
$$= \frac{-2-114i}{100} = -\frac{1}{50} - \frac{57}{50}i.$$

7.7. *Determinar x para que el cociente*

$$z = \frac{4 + 2xi}{3x + i}$$

sea:

a) Real. b) Imaginario puro.

Solución

Calculamos primero ese cociente:

$$z = \frac{(4 + 2xi)(3x - i)}{(3x + i)(3x - i)} = \frac{12x + 6x^2 i - 4i - 2xi^2}{9x^2 + 1} =$$

$$= \frac{14x}{9x^2 + 1} + \frac{6x^2 - 4}{9x^2 + 1} i.$$

a) Para que $z \in \mathbb{R}$, la parte imaginaria debe ser nula:

$$6x^2 - 4 = 0 \quad \text{es decir} \quad x^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Por tanto $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

b) Para que z sea imaginario puro, la parte real debe ser nula:

$$14x = 0 \quad \text{por tanto} \quad x = 0.$$

7.8. *Hallar las raíces cuadradas de* $z = -5 + 12i$.

Solución

Sea $z_1 = a + bi$ una raíz cuadrada de z. Se tiene $z_1^2 = z$, es decir

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -5 + 12i$$

De donde,

$$a^2 - b^2 = -5$$

$$2\text{ab} = 12 \quad \text{o bien} \quad a = \frac{6}{b}$$

Sustituyendo en la primera ecuación tenemos

$$\frac{36}{b^2} - b^2 = -5.$$

Por tanto,

$$36 - b^4 = -5b^2 \quad \text{o equivalentemente} \quad b^4 - 5b^2 - 36 = 0.$$

Hagamos $b^2 = x$ y resolvamos la ecuación $x^2 - 5x - 36 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \\ -4 \end{cases}$$

La segunda solución no es válida ya que $b^2 = x$ y b ha de ser un número real. Por tanto, $x = 9$ y $b = \pm 3$. Así pues, $a = \pm 2$.

Luego las raíces son $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = -2 - 3i$.

7.9. *Hallar los números complejos z tales que*

$$|z|^2 + 2z = 19 - 4i.$$

Solución

Sea $z = a + bi$. Sustituyendo en la igualdad tenemos

$$a^2 + b^2 + 2a + 2bi = 19 - 4i$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias de ambos miembros de la igualdad obtenemos,

$$2b = -4 \quad \text{y por tanto} \quad b = -2$$

$$a^2 + b^2 + 2a = 19, \quad \text{o bien} \quad a^2 + 2a - 15 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación de 2.° grado obtenemos,

$$a = 3 \quad \text{ó} \quad a = -5 \quad b = -2$$

y por tanto

$$z = 3 - 2i \quad \text{ó} \quad z = -5 - 2i.$$

7.10. *Calcular las raíces cúbicas de* 1.

Solución

Sea $z = a + bi$ una raíz cúbica. Tenemos $z^3 = 1$, es decir

$$(a + bi)^3 = 1.$$

Por el binomio de Newton

$$a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = 1$$
$$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = 1.$$

Igualando partes reales e imaginarias obtenemos

$$a^3 - 3ab^2 = 1$$
$$3a^2b - b^3 = 0.$$

Consideremos la segunda ecuación. Podemos escribirla

$$b(3a^2 - b^2) = 0.$$

De donde $b = 0$ ó $3a^2 - b^2 = 0$ y de aquí $b = \pm\sqrt{3}a$.

Sustituyendo en la primera obtenemos,

$$a^3 = 1 \quad \text{si} \quad b = 0, \quad \text{y de aquí} \quad a = 1, \quad \text{o bien}$$
$$-8a^3 = 1 \quad \text{si} \quad b^2 = 3a^2 \quad \text{y de aquí} \quad a^3 = -\frac{1}{8}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto, las tres raíces cúbicas de la unidad son

$$z_1 = 1 + 0i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

7.11. *Sean z_1, z_2 y z_3 las tres raíces obtenidas en el problema anterior. Demostrar que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$; $z_2^2 = z_3$ y $z_3^2 = z_2$.*

Solución

Recordemos que

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Sumando las tres obtenemos $z_1 + z_2 + z_3 = 0.$

Elevamos la segunda al cuadrado:

$$z_2^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}i =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_3.$$

Igualmente, elevamos la tercera raíz al cuadrado:

$$z_3^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_2.$$

Esta última igualdad podría haberse obtenido a partir de la segunda igualdad:

$$z_3^2 = (z_2^2)^2 = z_2^4 = z_2^3 \cdot z_2 = 1 \cdot z_2 = z_2$$

ya que las z_i son raíces cúbicas de la unidad.

7.12. *Demostrar que* $(z_1 + z_3)^4 = z_2$ y $(z_1 - z_2 + z_3)(z_1 + z_2 - z_3) = 4$, *siendo* z_1, z_2 y z_3 *como en los dos problemas anteriores.*

Solución

$$(z_1+z_3)^4=\binom{4}{0}z_1^4+\binom{4}{1}z_1^3z_3+\binom{4}{2}z_1^2z_3^2+\binom{4}{3}z_1z_3^3+\binom{4}{4}z_3^4=$$
$$=z_1^4+4z_1^3z_3+6z_1^2z_3^2+4z_1z_3^3+z_3^4.$$

Recordemos que $z_1 = 1$, $z_3^3 = 1$, $z_3^2 = z_2$ (problema anterior). Tenemos entonces

$$(z_1 + z_3)^4 = 1 + 4z_3 + 6z_2 + 4 + z_3 = 5 + 6z_2 + 5z_3.$$

Como $z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ tenemos

$$5+6z_2+5z_3=5-\frac{6}{2}+\frac{6\sqrt{3}}{2}i-\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=z_2$$

$$(z_1 - z_2 + z_3)(z_1 + z_2 - z_3) =$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$$
$$=(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=1^2-(\sqrt{3}i)^2=4.$$

7.13. *Demostrar que $X = \{z_1, z_2, z_3\}$ con el producto de los números complejos es un grupo, donde z_1, z_2 y z_3 como en los problemas anteriores.*

Solución

La propiedad asociativa se verifica en X ya que el producto de números complejos es asociativo.

Tenemos que ver que la operación es interna, es decir hay que comprobar que el producto de dos elementos de X es otro elemento de X o, lo que es equivalente, que el producto es una raíz de la unidad.

Sean x e y dos elementos cualesquiera de X:

$$(x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3 = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{luego} \quad x \cdot y \in X.$$

Puesto que $z_1 = 1$ pertenece a X, X posee elemento unidad.

Por último veamos que $z_2^{-1} = z_3$ y por tanto $z_3^{-1} = z_2 z_3^3 = 1 = z_3^2 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_3$ por el problema 7.11.

Por tanto $z_2^{-1} = z_3$ y viceversa.

Así pues $(X, \cdot)$ es un grupo. Además es abeliano, ya que el producto de números complejos es conmutativo.

7.14. *Demostrar que $X = \{a + b\sqrt{-3};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ con la suma y el producto usuales de los números complejos es un cuerpo.*

Solución

Escribamos $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$, por tanto $a + b\sqrt{3}i \in \mathbb{C}$ y X es un subconjunto de $\mathbb{C}$. Por tanto, la suma y el producto de elementos de X satisfacen las propiedades asociativa y conmutativa. Además, el producto es distributivo respecto de la suma.

Veamos que son operaciones internas en X:

$(a+b\sqrt{3}i)+(c+d\sqrt{3}i)=((a+c)+(b+d)\sqrt{3}i)$ que pertenece a X

$(a+b\sqrt{3}i)\cdot(c+d\sqrt{3}i)=((ac-bd\cdot 3)+(bc+ad)\sqrt{3}i)$ que pertenece a X.

El elemento neutro de la suma de los números complejos, el $0 + 0i$, pertenece a X ya que $0 + 0i = 0 + 0 \cdot \sqrt{3}i$. Igualmente el elemento unidad, $1 + 0i$, pertenece a X ya que $1 + 0i = 1 + 0 \cdot \sqrt{3} \cdot i$.

Observemos que el opuesto de $a + b\sqrt{3}i$, el $-a - b\sqrt{3}i$, también pertenece a X.

Por último hay que comprobar que el inverso de $a + b\sqrt{3}i$ pertenece a X:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{3}i} = \frac{a - b\sqrt{3}i}{(a + b\sqrt{3}i)(a - b\sqrt{3}i)} = \frac{a - b\sqrt{3}i}{a^2 + 3b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2 + 3b^2} - \frac{b}{a^2 + 3b^2}\sqrt{3}i$$

Como a y b pertenecen a $\mathbb{Q}$, $\frac{a}{a^2 + 3b^2}$ y $\frac{b}{a^2 + 3b^2}$ también pertenecen a $\mathbb{Q}$. Por tanto, $\frac{1}{a + b\sqrt{3}i}$ pertenece a X.

Así pues, $(X, +, \cdot)$ es un cuerpo.

8. ESPACIOS VECTORIALES

8.1. *Considérese el espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$ *con las operaciones definidas*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$$

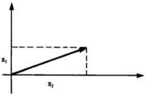
para cada $a \in \mathbb{R}$, (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Considerando cada par $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *como una «flecha» con origen en* $(0, 0)$ *y extremo final en* (x_1, x_2) *(ver figura), describir métodos para dibujar*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) \quad y \quad a(x_1, x_2)$$

donde

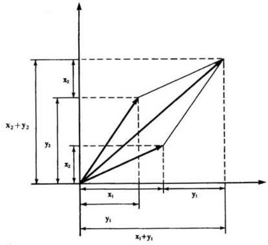
$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad a \in \mathbb{R}.$$



Solución

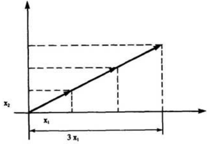
Sean dos vectores (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}$. Obsevamos en la gráfica que trazando una paralela en el extremo (x_1, x_2) al otro vector y haciendo lo mismo en el extremo (y_1, y_2), obtenemos el extremo de una «flecha» $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ que tiene su origen en $(0, 0)$.

Es precisamente $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$.



¿Cómo podemos obtener $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$? Si a partir del extremo (x_1, x_2) de la primera «flecha», dibujamos la segunda «flecha» y unimos el origen de la primera con el extremo de la segunda, obtenemos una flecha con origen en $(0, 0)$ y extremo en $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.

Hagamos ahora $3(x_1, x_2)$, por ejemplo. En el extremo de la «flecha» volvemos a dibujarla otra vez y luego otra vez, ya que, en este caso, es $3(x_1, x_2)$. El extremo de la tercera flecha es, precisamente, $(3x_1, 3x_2)$.



Luego para dibujar $a(x_1, x_2)$, «trasladamos» la «flecha» (x_1, x_2) a partir del extremo (x_1, x_2) tantas veces como indique a. El extremo de la última flecha es el extremo de $(ax_1, ax_2) = a(x_1, x_2)$.

8.2. *a)* *Dotar a $\mathbb{R}^n$ de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.*

b) *Dotar a $\mathbb{C}$ de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Solución

a) Sean $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos la ley de composición $+$ sobre $\mathbb{R}^n$ como sigue:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

y, como $x_i + y_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., n$, $(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ es grupo abeliano respecto de la ley $+$ puesto que es asociativa (ya que la $+$ en $\mathbb{R}$ lo es), tiene elemento neutro (es el

$(0, 0, ..., 0)$), cada elemento tiene simétrico (el simétrico de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ es $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$) y además es conmutativa.

También definimos una aplicación de $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, si $a \in \mathbb{Q}$ $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(a, (x_1, x_2, ..., x_n)) \rightarrow a \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$$

que, efectivamente, es un elemento de $\mathbb{R}^n$, pues $ax_i \in \mathbb{R}$. Esta aplicación cumple las cuatro propiedades siguientes:

1) $a((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) = a(x_1, x_2, ..., x_n) + a(y_1, y_2, ..., y_n)$.

En efecto:

$$a((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) \overset{\text{por ley } +}{=\!=}$$

$$= a(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) =$$

$$= (a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), ..., a(x_n + y_n)) = I$$

por la propiedad distributiva del producto en $\mathbb{R}$

$$I = (ax_1 + ay_1, ax_2 + ay_2, ..., ax_n + ay_n) \overset{\text{por ley } +}{=\!=}$$

$$= (ax_1, ax_2, ..., ax_n) + (ay_1, ay_2, ..., ay_n) = II$$

por aplicación $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$II = a(x_1, x_2, ..., x_n) + a(y_1, y_2, ..., y_n).$$

2) $(a + b)(x_1, x_2, ..., x_n) = a(x_1, x_2, ..., x_n) + b(x_1, x_2, ..., x_n)$, siendo $a, b \in \mathbb{Q}$ $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Se demuestra de forma análoga a la anterior.

3) $a(b(x_1, x_2, ..., x_n)) = (ab)(x_1, x_2, ..., x_n)$.

También se verifica puesto que:

$$a(b(x_1, x_2, ..., x_n)) = a(bx_1, bx_2, ..., bx_n) =$$
$$= (a(bx_1), a(bx_2), ..., a(bx_n)) = III$$

por la propiedad asociativa del producto en $\mathbb{R}$

$$III = ((ab)x_1, (ab)x_2, ..., (ab)x_n) = (ab)(x_1, x_2, ..., x_n).$$

4) $1(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ya que

$$1x_i = x_i \quad \text{para todo} \quad i = 1, ..., n.$$

Por tanto, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$.

b) De forma análoga a *a*) se dota a $\mathbb{C}$ de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{C}$ es cuerpo, en particular es grupo aditivo abeliano. Definiendo la aplicación $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, siendo $a \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{C}$, $(a, x) \to ax$, se cumplen todas las propiedades exigidas en la definición de espacio vectorial porque como $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ también.

8.3. *¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?*

a) $\mathbb{R}$ *es espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}$ *es espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$.

c) $\mathbb{C}$ *es espacio vectorial sobre* $\mathbb{Q}$.

d) $\mathbb{C}$ *es espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$.

Solución

a) Es cierta, puesto que todo cuerpo es espacio vectorial sobre sí mismo.

b) No es cierta, ya que si $a \in \mathbb{R}$ y $i \in \mathbb{C}$, se debe cumplir que ai sea un elemento de $\mathbb{R}$. Pero $ai \notin \mathbb{R}$, $ai \in \mathbb{C}$; por tanto, no se puede definir la aplicación $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ no es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

c) y d) También son ciertas, ya que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son subconjuntos de $\mathbb{C}$ y se podrán definir las aplicaciones $\mathbb{Q} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(a, x) \to ax$, en el primer caso $a \in \mathbb{Q}$ y en el segundo $a \in \mathbb{R}$, donde $ax \in \mathbb{C}$ y se cumplen las 4 propiedades.

8.4. *En el conjunto $\mathbb{R}^2$ se consideran las operaciones siguientes:*

— *suma:* $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ *para* $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

— *producto por números reales:* $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2^2)$ $a \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

¿Es $\mathbb{R}^2$ con las operaciones consideradas un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Solución

No, pues se tiene que cumplir $1(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ y, sin embargo, según la definición dada para el producto por números reales, resulta

$$1(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2) \neq (x_1, x_2)$$

salvo valores particulares de x_2.

Por tanto, $\mathbb{R}^2$ con las operaciones definidas anteriormente no tiene estructura de espacio vectorial.

8.5. *Dados E_1 y E_2 espacios vectoriales sobre el cuerpo K, definir una estructura de espacio vectorial sobre K en $E_1 \times E_2$.*

(Observación: caso particular de espacio vectorial de aplicaciones definido en el libro).

Solución

Definimos en $E_1 \times E_2$ una suma para dotar al conjunto de estructura de grupo abeliano.

Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in E_1 \times E_2.$$

Efectivamente, $(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$ es un elemento de $E_1 \times E_2$ puesto que, como $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$ y ambos son espacios vectoriales, $x_1 + y_1 \in E_1$ y $x_2 + y_2 \in E_2$.

Esta operación cumple las propiedades siguientes:

a) *Asociativa:*

$$(x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2)) = ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2),$$

puesto que

$$(x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2)) = (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) =$$
$$= (x_1 + (y_1 + z_1),\ x_2 + (y_2 + z_2)) = (*)$$

como E_1 y E_2 son grupos tienen la propiedad asociativa

$$(*) = ((x_1 + y_1) + z_1,\ (x_2 + y_2) + z_2) =$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) =$$
$$= ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2).$$

b) *Existencia de elemento neutro:* Tomamos $(0_1, 0_2) \in E_1 \times E_2$ donde $0_1 \in E_1$ y $0_2 \in E_2$ y verifica, para todo $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, que

$$(x_1, x_2) + (0_1, 0_2) = (0_1, 0_2) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

ya que en E_1 y E_2 existen elementos neutros, al tener ambos estructura de grupo abeliano.

c) *Existencia de elementos simétricos:* Dado $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, sean x'_1 el inverso de $x_1 \in E_1$ y x'_2 el inverso de $x_2 \in E_2$; el inverso de (x_1, x_2) es precisamente $(x'_1, x'_2) \in E_1 \times E_2$ puesto que

$$(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = (0_1, 0_2).$$

d) *Conmutativa:*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2).$$

Definimos, en segundo lugar, una aplicación

$$K \times (E_1 \times E_2) \to E_1 \times E_2 \text{ tal que}$$

para todo $a \in K$ y $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$

$$a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2),$$

al ser E_1 y E_2 espacios vectoriales, $ax_1 \in E_1$, $ax_2 \in E_2$ o, lo que es lo mismo, $(ax_1, ax_2) \in E_1 \times E_2$. Esta aplicación debe cumplir las siguientes propiedades:

1. $a((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = a(x_1, x_2) + a(y_1, y_2)$
2. $(a + b)(x_1, x_2) = a(x_1, x_2) + b(x_1, x_2)$
3. $a(b(x_1, x_2)) = (ab)(x_1, x_2)$
4. $1(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

Para todo $a, b \in K$, (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$.

En efecto,

1. $a((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = a(x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$
   $= (a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2)) = (I)$,

como E_1 y E_2 son espacios vectoriales cumplen la propiedad 1,

$$(I) = (ax_1 + ay_1, ax_2 + ay_2) = (ax_1, ax_2) + (ay_1, ay_2) =$$
$$= a(x_1, x_2) + a(y_1, y_2)$$

2. $(a + b)(x_1, x_2) = ((a + b)x_1, (a + b)x_2) = (II)$,

al ser E_1 y E_2 espacios vectoriales verifican la propiedad 2,

$$(II) = (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2) = (ax_1, ax_2) + (bx_1, bx_2) =$$
$$= a(x_1, x_2) + b(x_1, x_2).$$

3. $a(b(x_1, x_2)) = a(bx_1, bx_2) = (a(bx_1), a(bx_2)) = \text{(III)}$,

por ser E_1 y E_2 espacios vectoriales verifican la propiedad 3,

$$(III) = ((ab)x_1, (ab)x_2) = (ab)(x_1, x_2)$$

4. $1(x_1, x_2) = (1x_1, 1x_2) =$

(E_1 y E_2 cumplen la propiedad 4 al ser espacios vectoriales)
$= (x_1, x_2)$.

Por tanto, con las operaciones anteriormente definidas y siendo E_1, E_2 espacios vectoriales sobre K, el conjunto $E_1 \times E_2$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K.

8.6. *Sea p un número primo, ¿$\mathbb{Z}/(p)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo:*

a) $\mathbb{Z}/(p)$
b) $\mathbb{Q}$
c) $\mathbb{R}$?

Solución

a) Sí, pues todo cuerpo es espacio vectorial sobre sí mismo.

b) y c) No son espacios vectoriales ya que no se puede definir la multiplicación por escalares. Ya que en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}/(p) \to \mathbb{Z}/(p)$ no siempre al multiplicar un número racional por uno de $\mathbb{Z}/(p)$ resulta un elemento de este último conjunto (y, análogamente, sucede con $\mathbb{R}$). Por ejemplo, $\frac{3}{5} \cdot \bar{1} \notin \mathbb{Z}/(p)$.

8.7. *Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Una aplicación $f : E_1 \to E_2$ se llama aplicación lineal si:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{para todo} \quad x, y \in E_1$$
$$f(ax) = af(x), \quad \text{para todo} \quad a \in K \text{ y } x \in E_1.$$

Dotar al conjunto de todas las aplicaciones lineales de E_1 en E_2, $\mathscr{L}(E_1, E_2)$, de estructura de espacio vectorial sobre K.

Solución

Se definen en $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ las operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(af)(x) = af(x).$$

Efectivamete, si $f, g \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$, $f + g \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ pues $(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y)$ y, como f y g son aplicaciones lineales, es igual a

$$f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = f(x) + g(x) + f(y) + g(y) =$$
$$= (f + g)(x) + (f + g)(y).$$

De forma análoga

$$(f + g)(ax) = f(ax) + g(ax) = (I)$$

como f y g son aplicaciones lineales

$$(I) = af(x) + ag(x) = a(f(x) + g(x)) \underset{\text{suma}}{\overset{\text{definición}}{=\!=\!=}} a(f + g)(x)$$

El conjunto $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ con la suma anteriormente definida es un grupo abeliano, pues se cumplen las propiedades siguientes:

1. *Asociativa*

$$(f + g) + h = f + (g + h)$$

ya que

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (II)$$

como E_2 es un espacio vectorial

$$(II) = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + ((g + h)(x)) =$$
$$= (f + (g + h))(x), \text{ para todo } f, g, h \in \mathscr{L}(E_1, E_2).$$

2. *Existencia de elemento neutro*, ya que existe una aplicación lineal f_0 tal que $f_0(x) = 0$ para todo $x \in E_1$ que cumple $(f + f_0)(x) = (f_0 + f)(x) = f(x)$, siendo f cualquier función lineal.

3. *Existencia de elementos simétricos*, ya que para cada función lineal f existe otra función lineal f_1, definida por $f_1(x) = -f(x)$, tal que $(f + f_1)(x) = f_0(x)$.

4. *Conmutativa*, ya que, evidentemente, $f + g = g + f$.

Por último, para que $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ sea un espacio vectorial, es preciso demostrar que la aplicación $K \times \mathscr{L}(E_1, E_2) \to \mathscr{L}(E_1, E_2)$, definida por $af(x) = (af)(x)$ (es fácil probar que la aplicación así definida es lineal), verifica las propiedades:

(a) $a(f + g) = af + ag$

(b) $(a + b)f = af + bf$

(c) $a(bf) = (ab)f$

(d) $1 \cdot f = f$

En efecto:

(a) $a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) =$
(al ser E_2 espacio vectorial)
$= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x)$.

(b) $(a + b)f(x) =$
(como E_2 es espacio vectorial)
$= af(x) + bf(x) = (af + bf)(x)$.

(c) $a(bf(x)) = a((bf)(x)) = (a(bf))(x) =$
(al ser E_2 espacio vectorial)
$= ((ab)f)(x) = (ab)f(x)$.

(d) $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, al ser $f(x) \in E_2$ y éste ser un espacio vectorial.

Luego $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ es un espacio vectorial sobre K.

8.8. *Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Un subconjunto no vacío E_0 de E es un subespacio vectorial de E si, y sólo si, se verifica la siguiente condición:*

$$ax + by \in E_0 \quad \textit{para todo par} \quad x, y \in E_0 \quad \text{y} \quad a, b \in K.$$

Solución

Sabemos que un subconjunto no vacío E_0 de E es un subespacio vectorial si, y sólo si, se verifica que

$$x + y \in E_0 \quad \text{para todo} \quad x, y \in E_0 \qquad [\mathrm{I}]$$

$$ax \in E_0 \quad \text{para todo} \quad a \in K \quad y \quad x \in E_0 \qquad [\mathrm{II}]$$

Hay que demostrar que:

1.°) Si E_0 es un subespacio vectorial, entonces $ax + by \in E_0$.

2.°) Si $ax + by \in E_0$, entonces E_0 es un subespacio vectorial.

1.°) Si E_0 es un subespacio vectorial, se cumple, por la condición [II] que $ax \in E_0$ y $by \in E_0$, siendo $a, b \in K$ y $x, y \in E_0$; ahora bien, por la condición [*I*], como ax, $by \in E_0$, $ax + by \in E_0$. Por tanto si E_0, no vacío, es subespacio vectorial se cumple que $ax + by \in E_0$.

2.°) Para demostrar que E_0 es un subespacio vectorial hay que probar que se cumplen [I] y [II].

En efecto, como $ax + by \in E_0$ para todo $x, y \in E_0$ y $a, b \in K$, en particular se cumplirá para $a = b = 1$. Entonces,

$$ax + by = 1x + 1y = x + y.$$

Luego si $x, y \in E_0$ $x + y \in E_0$ (condición I).

Análogamente, si $b = 0$ $\quad ax + by = ax$, por tanto, si $a \in K$ y $x \in E_0$ $ax \in E_0$.

8.9. *Decir cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^3$:

a) $\{(x, 0, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(x, 1, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Solución

a) Según el problema anterior, puesto que es un conjunto no vacío (pues, por ejemplo $(0, 0, 0)$ es un elemento), hay que probar que, siendo $(x, 0, y)$, $(x', 0, y')$ elementos cualesquiera y a, b cualquier pareja de números reales, se cumple siempre que $a(x, 0, y) + b(x, 0, y)$ pertenece también al conjunto dado. En efecto,

$$a(x, 0, y) + b(x', 0, y') = (ax, 0, ay) + (bx', 0, by') = \\ = (ax + bx', 0, ay + by'),$$

y

$$ax + bx', ay + by' \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, el conjunto $\{(x, 0, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Sin embargo, en este caso,

$$(x, 1, y) + (x', 1, y') = (x + x', 2, y + y')$$

no es un elemento del conjunto, pues éstos tienen la componente segunda igual a 1; por tanto, este conjunto no es subespacio vectorial.

8.10. *Probar que el subconjunto S de* $\mathbb{R}^3$ *de todos los vectores* $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *tales que*

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3\lambda + 2\mu \\ x_2 &= \mu \\ x_3 &= \lambda + \mu \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

Solución

Sean $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, tales que

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 3\lambda + 2\mu \\ x_2 = \quad\quad \mu \\ x_3 = \lambda + \quad \mu \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y_1 = 3\lambda' + 2\mu' \\ y_2 = \quad\quad \mu' \\ y_3 = \lambda' + \quad \mu' \end{array}\right\}$$

Hacemos

$$a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3) =$$
$$= (3a\lambda + 2a\mu, a\mu, a\lambda + a\mu) + (3b\lambda' + 2b\mu', b\mu', b\lambda' + b\mu') =$$
$$= (3(a\lambda + b\lambda') + 2(a\mu + b\mu'), a\mu + b\mu', (a\lambda + b\lambda') + (a\mu + b\mu')),$$

haciendo $a\lambda + b\lambda' = \lambda''$, $a\mu + b\mu' = \mu''$ resulta: $(3\lambda'' + 2\mu'', \mu'', \lambda'' + \mu'')$, que es un vector de S pues se puede expresar como se muestra en [1].

Por tanto, S es un subespacio vectorial, ya que, además, es no vacío pues, por ejemplo, si $\lambda = \mu = 0$, el vector $(0, 0, 0) \in S$.

8.11. *Sea E un espacio vectorial sobre K.*

Si $E_1, E_2, \ldots, E_r$ son subespacios vectoriales de E, probar que $\bigcap_{i=1}^{r} E_i$ es un subespacio vectorial de E.

Solución

El conjunto $\bigcap_{i=1}^{r} E_i$ está formado por todos los vectores que son elementos de todos los E_i. Como en casos anteriores, habrá que probar que si

$$x, y \in \bigcap_{i=1}^{r} E_i \quad \text{y} \quad a, b \in K$$

$$ax + by \in \bigcap_{i=1}^{r} E_i.$$

En efecto, $ax + by \in E_i$ para todo $i = 1, \dots, r$ por ser los E_i subespacios vectoriales.

Además $\bigcap_{i=1}^{r} E_i \neq \phi$ ya que, al menos, $\bar{0} \in \bigcap_{i=1}^{r} E_i$, al ser elemento de todos los subespacios E_i.

8.12. *Sea E un espacio vectorial sobre K.*

Si $E_1, E_2, \dots, E_r$ son subespacios vectoriales de E, se define:

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_r = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_r : x_i \in E_i\}$$

Probar que $E_1 + \cdots + E_2$ es un subespacio vectorial de E.

Solución

Habrá que verificar que

si $x_1 + x_2 + \cdots + x_r$, $y_1 + y_2 + \cdots + y_r \in E_1 + E_2 + \cdots + E_r$

y $a, b \in K$, se cumple que

$$a(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + b(y_1 + y_2 + \cdots + y_r) \in E_1 + E_2 + \cdots + E_r.$$

En efecto,

$$a(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + b(y_1 + y_2 + \cdots + y_r) =$$
$$= (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) + \cdots + (ax_r + by_r).$$

Estudiemos cada uno de los paréntesis:

$$(ax_i + by_i) \in E_i \quad \text{ya que} \quad x_i, y_i \in E_i \quad \text{y} \quad E_i$$

es un subespacio vectorial, por tanto el primer paréntesis es un elemento de E_1, el segundo de $E_2, \dots$ Por tanto

$$a(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + b(y_1 + y_2 + \cdots + y_r) \in E_1 + E_2 + \cdots + E_r$$

Además, $E_1 + E_2 + \cdots + E_r$ es un conjunto no vacío pues todos los conjuntos E_i al ser subespacios vectoriales son no vacíos.

Queda probado, por todo ello, que $E_1 + \cdots + E_r$ es un subespacio vectorial.

8.13. *Sean a_{ij} elementos fijos de $\mathbb{R}$. Probar que el subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ de todos los vectores $(x_1, ..., x_n)$ tales que*

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad [1]$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Solución

El conjunto S es no vacío pues, al menos, contiene el vector $(0, 0, ..., 0)$ que verifica las ecuaciones [1].

Habrá que probar, entonces, que si

$$(x_1, x_2, ..., x_n),\ (y_1, y_2, ..., y_n) \in S \quad \text{y} \quad a, b \in \mathbb{R},$$
$$a(x_1, x_2, ..., x_n) + b(y_1, y_2, ..., y_n) \in S.$$

Es fácil comprobar que el conjunto de vectores $S_1 \in \mathbb{R}^n$ que verifican la primera ecuación de [1] es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Y lo mismo se verifica para los vectores que cumplen las siguientes ecuaciones. Luego tenemos r subespacios vectoriales S_i tales que sus elementos verifican la ecuación i del sistema [1].

Como $S = \bigcap_{i=1}^{r} S_i$ y la intersección de subespacios es un subespacio también (problema 8.11), el conjunto S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

8.14. *Sean $a_{ij} \in \mathbb{R}$ fijos. Probar que el subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ de todos los vectores $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que:*

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1r}\lambda_r \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{nr}\lambda_r \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

para $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Solución

S es no vacío pues, al menos, $(0, 0, ..., 0) \in S$ ya que basta tomar todos $\lambda_i = 0$ en [1].

Sean $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n) \in S$

$(x_1, ..., x_n)$ verifica [1] y

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\lambda'_1 + \cdots + a_{1r}\lambda'_r \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}\lambda'_1 + \cdots + a_{nr}\lambda'_r \end{aligned}\right\} \quad [2] \quad \text{con } \lambda'_1, ..., \lambda'_r \in \mathbb{R}.$$

Hay que probar que, siendo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a(x_1, ..., x_n) + b(y_1, ..., y_n) \in S.$$

Para que

$$(ax_1 + by_1, ..., ax_n + by_n) \in S$$

se ha de cumplir que

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + by_1 &= a_{11}\lambda''_1 + \cdots + a_{1r}\lambda''_r \\ &\vdots \\ ax_n + by_n &= a_{n1}\lambda''_1 + \cdots + a_{nr}\lambda''_r \end{aligned}\right\} \quad [3] \quad \text{donde } \lambda''_1, ..., \lambda''_r \in \mathbb{R}$$

Como $x, y \in S$, se tiene que

$$ax_i + by_i = a(a_{i_1}\lambda_1 + \cdots + a_{i_r}\lambda_r) + b(a_{i_1}\lambda'_1 + \cdots + a_{i_r}\lambda'_r) =$$
$$= a_{i_1}(a\lambda_1 + b\lambda'_1) + \cdots + a_{i_r}(a\lambda_r + b\lambda'_r)$$

haciendo $a\lambda_1 + b\lambda'_1 = \lambda''_1$ y $a\lambda_r + b\lambda'_r = \lambda''_r$, el vector $a(x_1, ..., x_n) + b(y_1, ..., y_n)$ verifica [3] y, por tanto, es un vector de S.

Luego S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

8.15. *a) ¿El subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ de todos los vectores $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que:*

$$x_1 + \cdots + x_n > 0$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$?

b) ¿El subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ de todos los vectores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

c) Lo mismo para el subconjunto $S \in \mathbb{R}^2$,

$$S = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 = 0\}$$

d) Y para

$$S = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 = 1\}.$$

Solución

a) No, S no es un subespacio vectorial, ya que por ejemplo sea $(1, 1, ..., 1) \in S$, $-2 \in \mathbb{R}$,

$$-2(1, 1, ..., 1) = (-2, -2, ..., -2)$$

y

$$-2 + (-2) + \cdots + (-2) < 0$$

Por tanto $-2(1, 1, ..., 1) \notin S$.

b) Tampoco en este caso es un subespacio vectorial. Por ejemplo, sean $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ que son elementos de S, pues

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

pero, sin embargo,

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \notin S \text{ ya que}$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = (0, 0),\ 0^2 + 0^2 \neq 1$$

c) En este caso sí es un subespacio vectorial, ya que todo subconjunto de vectores

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tales que } a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

$a_i \in \mathbb{R}$ es un subespacio vectorial (generalización del problema 2 de autocomprobación de la U.D. 3, Tema 1).

No es un subespacio vectorial puesto que si, por ejemplo, $(-1, 1) \in S$ ya que $2(-1) + 3 \cdot 1 = 1$ y $4 \in \mathbb{R}$ se tiene que $4(-1, 1) \notin S$ porque

$$4(-1, 1) = (-4, 4), \quad 2(-4) + 3 \cdot 4 = 4 \neq 1.$$

8.16. *¿Cuánto ha de valer x para que el vector $(x, 6, 13)$ pertenezca al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ engendrado por $(1, 3, 5)$ $(-1, 0, 1)$?*

Solución

Para que $(x, 6, 13)$ pertenezca al subespacio, es necesario y suficiente que existan $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x, 6, 13) = a(1, 3, 5) + b(-1, 0, 1);$$
$$(x, 6, 13) = (a - b, 3a, 5a + b),$$

de donde $x = a - b,$

$$6 = 3a, \ a = 2$$
$$13 = 5a + b, \ 13 = 5 \cdot 2 + b, \ b = 3$$

$x = 2 - 3 = -1.$

Luego $x = -1$.

8.17. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, probar:*

$$\langle (2, 5, 3), (0, -1, -1) \rangle = \langle (2, 7, 5), (4, 9, 5) \rangle$$

Solución

Para probar la igualdad de los subespacios engendrados por esos vectores, vamos a hacer transformaciones en uno de los sistemas, obteniendo sistemas equivalentes.

$$\text{Sea } S = \{(2, 5, 3), (0, -1, -1)\}.$$

Multiplicando el segundo vector por -2 y sumándole el primero se obtiene otro vector que es combinación lineal de los anteriores, y

$$S_1 = \{(2, 5, 3), (0, -1, -1), (2, 7, 5)\}$$

es un sistema equivalente a S.

Además,

$$2(2, 5, 3) + (0, -1, -1) = (4, 9, 5)$$

$$S_2 = \{(2, 5, 3), (0, -1, -1), (2, 7, 5), (4, 9, 5)\}$$

Como los dos primeros son combinación lineal de los dos segundos, el sistema que resulta al eliminar los dos primeros es equivalente al anterior, por tanto,

$$S_3 = \{(2, 7, 5), (4, 9, 5)\} \quad \text{y} \quad \langle S \rangle = \langle S_3 \rangle.$$

8.18. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$ se consideran los sistemas:*

$$S = \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$
$$S' = \{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (\lambda, \mu, \lambda, 1)\}$$

Hallar λ y μ para que $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Solución

Si en S al segundo vector le sumamos el primero obtenemos un sistema S'' equivalente a S, es decir,

$$S'' = \{(1,0,1,0), (1,0,1,1)\}$$

y $\langle S \rangle = \langle S'' \rangle$.

Para que se cumpla la condición de que $\langle S' \rangle = \langle S'' \rangle$, el vector $(\lambda, \mu, \lambda, 1)$ ha de ser combinación lineal de $(1,0,1,0)$ y $(1,0,1,1)$, pues entonces se puede suprimir dicho vector.

Es decir, supongamos que existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(\lambda, \mu, \lambda, 1) = a_1(1,0,1,0) + a_2(1,0,1,1)$$

De donde

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= a_1 + a_2 \\ \mu &= 0 \\ \lambda &= a_1 + a_2 \\ 1 &= a_2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \mu &= 0 \\ \lambda &= 1 + a_1 \end{aligned}$$

Tenemos, pues, que si $a_2 = 1$, $a_1 = 1 - \lambda$, el vector $(\lambda, \mu, \lambda, 1)$ es combinación lineal de los dos primeros.

8.19. *En el espacio vectorial* $(\mathbb{Z}/(3))^3$ *sobre* $\mathbb{Z}/(3)$, *determinar* $\lambda \in \mathbb{Z}/(3)$ *de modo que:*

$$(\lambda, \bar{2}, \bar{0}) \in \langle\{(\bar{1}, \bar{2}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{2})\rangle.$$

Solución

Tendran que existir $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/(3)$ tales que

$$(\lambda, \bar{2}, \bar{0}) = \bar{a}(\bar{1}, \bar{2}, \bar{1}) + \bar{b}(\bar{1}, \bar{0}, \bar{2}),$$

es decir

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \bar{1}\cdot\bar{a} + \bar{1}\cdot\bar{b} \\ \bar{2} &= \bar{2}\cdot\bar{a} \\ \bar{0} &= \bar{1}\cdot\bar{a} + \bar{2}\cdot\bar{b} \end{aligned}\right\}$$

como $\bar{a} = \bar{1}$, $\bar{0} = \bar{1}\cdot\bar{1} + \bar{2}\cdot\bar{b}$, $\bar{0} = \bar{1} + \bar{2}\bar{b}$, $\bar{b} = \bar{1}$,
$\lambda = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$.

8.20. *En $\mathbb{Q}^3$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, encontrar un sistema generador del subespacio vectorial:*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Solución

Como

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_3 = -x_1 - x_2,$$

luego

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, -x_1 - x_2) = (x_1, 0, -x_1) + (0, x_2, -x_2) = \\ &= x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1).\end{aligned}$$

Entonces el conjunto $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ es un sistema generador del subespacio vectorial S.

9. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

9.1. *Dado el conjunto de vectores*

$$\{(1, 3, -1), (2, -3, 1), (4, 3, -1)\}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

a) es un sistema libre

b) es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$

c) no verifica ninguna de las afirmaciones anteriores.

Solución

Para que sea un sistema libre se tiene que verificar que los únicos escalares a, b, $c \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$a(1, 3, -1) + b(2, -3, 1) + c(4, 3, -1) = (0, 0, 0)$$

son $a = b = c = 0$; operando, veamos si se cumple la condición anterior

$$(a, 3a, -a) + (2b, -3b, b) + (4c, 3c, -c) =$$
$$= (a + 2b + 4c, 3a - 3b + 3c, -a + b - c) = (0, 0, 0),$$

luego tenemos

$$\left.\begin{aligned} a + 2b + 4c &= 0 \\ 3a - 3b + 3c &= 0 \\ -a + b - c &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

la segunda y la tercera ecuación son iguales por lo que el sistema queda reducido a dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a + 2b + 4c &= 0 \\ -a + \ b - \ c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que, sumándolas se obtiene $3b + 3c = 0$, es decir, $b = -c$ y, sustituyendo el valor de b en la segunda, $a = -2c$.

Por tanto, para cada valor real que le demos a c tenemos unos escalares a, b, c, no necesariamente nulos que satisfacen el sistema de ecuaciones [1]. Es decir, el sistema no es libre sino ligado. Por lo que la afirmación *a*) no es correcta.

Otra manera de comprobar si un sistema es ligado, cómoda en ocasiones, es tratar de expresar un vector como combinación lineal de los demás. En nuestro caso, por ejemplo:

$$(4, 3, -1) = 2(1, 3, -1) + (2, -3, 1)$$

con lo que queda demostrado que el sistema es ligado.

Tampoco la afirmación *b*) es correcta ya que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión tres. Por tanto, un sistema generador del mismo ha de tener, como mínimo, tres vectores. Pero como cualquier base de este espacio está formada por tres vectores, si los tres vectores del enunciado fueran sistema generador, formarían una base y, por ello, sería un sistema libre, pero no lo es. Entonces no es sistema generador.

Otra forma de estudiar si es sistema generador es la siguiente:

Para que el conjunto de vectores $\{(1, 3, -1), (2, -3, 1), (4, 3, -1)\}$ sea sistema generador de $\mathbb{R}^3$ es necesario y suficiente que cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores del sistema. Es decir, deben existir $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x, y, z) = a(1, 3, -1) + b(2, -3, 1) + c(4, 3, -1) \qquad [2]$$

De donde,

$$(x, y, z) = (a + 2b + 4c, 3a - 3b + 3c, -a + b - c),$$

es decir

$$\left.\begin{aligned} x &= a + 2b + 4c \\ y &= 3a - 3b + 3c \\ z &= -a + b - c \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

como $y = -3(-a + b - c)$ y $z = -a + b - c$, sustituimos esta última ecuación en la segunda,

$$y = -3z$$

Por tanto, sólo existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ que verifiquen [2] cuando la segunda componente del vector es menos tres veces la tercera y no para cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Por lo que no es sistema generador.

(Observación: Cuando el alumno haya estudiado los temas de matrices y determinantes y sistemas de ecuaciones lineales la resolución de este tipo de problemas es más sencilla pues la discusión de los sistemas [1] y [3] se puede hacer de forma más sistemática.

El sistema [1] es homogéneo, por tanto, para que la única solución sea la nula el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al número de incógnitas, pero en nuestro caso:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

y el sistema es indeterminado, es decir, con más soluciones que la nula y el sistema es ligado.

Para que sea sistema generador el conjunto de vectores propuesto, el sistema de ecuaciones [3] ha de tener solución para cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}$. Es decir, el sistema debe ser compatible (si es determinado, los vectores forman base y la solución única (a, b, c) son las coordenadas del vector (x, y, z) en dicha base; si es indeterminado, aunque sí es sistema generador, es ligado, le «sobran» vectores para ser base y la solución no es única). Por tanto, el rango de la matriz de los coeficientes ha de ser el mismo que el de la matriz ampliada. Pero en nuestro caso no ocurre así.

La matriz de los coeficientes es la misma que la del sistema [1], luego es de rango 2.

Sin embargo, la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & x \\ 3 & -3 & 3 & y \\ -1 & 1 & -1 & z \end{pmatrix}$$

es de rango 3 pues (x, y, z) es cualquier vector y, en general, habrá un determinante de orden 3 distinto de cero.

El sistema es incompatible, no tiene solución y el conjunto de vectores dado no es sistema generador.)

9.2. *Hallar x e y para que los vectores*

$$u = (5, x, -4, -3), \quad v = (1, 0, x, 1) \quad y \quad w = (-1, y, -1, 3)$$

de $\mathbb{R}^4$ *sean linealmente independientes.*

Solución

Para que los vectores u, v, w sean linealmente independientes se ha de cumplir que los únicos escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$, que verifiquen

$$au + bv + cw = \bar{0}, \quad \text{sean} \quad a = b = c = 0.$$

Imponemos esta condición:

$$a(5, x, -4, -3) + b(1, 0, x, 1) + c(-1, y, -1, 3) = (0, 0, 0, 0);$$

$$(5a+b-c,\ ax+cy,\ -4a+bx-c,\ -3a+b+3c)=(0, 0, 0, 0);$$

resulta el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 5a + b - c &= 0 \\ xa + \quad yc &= 0 \\ -4a + xb - c &= 0 \\ -3a + b + 3c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

despejando c en la primera ecuación y sustituyendo su valor en la cuarta tenemos:

$$c = 5a + b \quad [1], \quad -3a + b + 3(5a + b) = 0, \quad b = -3a,$$

Sustituimos el valor de b en la ecuación [1]

$$c = 2a.$$

Por último, sustituyendo los valores obtenidos para b y c en las ecuaciones segunda y tercera, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} (x + 2y)\cdot a &= 0 \\ (-6-3x)\cdot a &= 0 \end{aligned}\right\}\begin{matrix}[2]\\ [3]\end{matrix}$$

En ambas ecuaciones, al ser un producto de dos factores, necesariamente uno de los factores ha de ser cero. Es decir:

En [3] $\quad a = 0 \quad$ ó $\quad -6 - 3x = 0, \quad x = -2$

Por tanto, si obligamos a ser $x \neq -2$, necesariamente $a = 0$ (y por tanto b y c) y los vectores u, v, w son linealmente independientes.

Ahora bien, si $x = -2$, no tiene por qué tener a valor cero. Sustituyendo este valor de x en [3]

$$(-2 + 2y) \cdot a = 0, \quad a = 0 \quad \text{ó} \quad y = 1.$$

Si $y \neq 1$, necesariamente $a = 0$.

Resumiendo: los vectores u, v, w son linealmente independientes si:

— $x \neq -2$, y cualquier número real

ó

— $x = -2$, $y \neq 1$.

9.3. *¿Los vectores $(2, 3)$, $(3, 2)$ son linealmente independientes como elementos del espacio vectorial $(\mathbb{Z}/(5))^2$? ¿Y como elementos de $\mathbb{R}^2$?*

Solución

Para que sean linealmente independientes se ha de cumplir que los únicos valores a, b que verifiquen $a(2, 3) + b(3, 2) = (0, 0)$ sean los nulos. Operando resulta

$$\left.\begin{aligned} 2a + 3b = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Considerados los vectores como elementos de $(\mathbb{Z}/(5))^2$ no son linealmente independientes pues, si multiplicamos la primera ecuación por $\bar{3} \in \mathbb{Z}/(5)$ y la segunda por $\bar{2} \in \mathbb{Z}/(5)$, como $\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{4}$, $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$ y $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1}$, tenemos

$$\left.\begin{aligned} a + \bar{4}b = \bar{0} \\ a + \bar{4}b = \bar{0} \end{aligned}\right\}$$

como las dos ecuaciones son iguales, el sistema queda reducido a una sola y encontramos valores distintos de cero para a y b que verifiquen la ecuación, por ejemplo, $a = \bar{1}$, $b = \bar{1}$, ya que $\bar{1} + \bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$.

Sin embargo, como elementos de $\mathbb{R}^2$ sí son linealmente independientes puesto que si en las ecuaciones de [1] multiplicamos la primera por 3 y la segunda por -2 sumándolas a continuación obtenemos la ecuación $5b = 0$, de donde $b = 0$ y, por tanto, $a = 0$.

9.4. *Si consideramos en* $\mathbb{R}^3$ *los vectores* $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 9)$ *y* $(2, 0, -1)$:

a) ¿Son linealmente independientes?

b) ¿Constituyen sistema generador de $\mathbb{R}^3$*?*

c) ¿Constituyen una base de $\mathbb{R}^3$*?*

Solución

a) No pueden ser linealmente independientes porque $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión 3 y, por ello, el máximo número de vectores libres que puede haber es tres. En este espacio 4 vectores son siempre linealmente dependientes.

c) Al no ser linealmente independientes no constituyen base del espacio $\mathbb{R}^3$.

b) Para que sean sistema generador todo vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que poder expresar como combinación lineal de dichos vectores, es decir, han de existir a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 2, 3) + c(1, 4, 9) + d(2, 0, -1)$$

operando resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + b + c + 2d \\ y = a + 2b + 4c \\ z = a + 3b + 9c - d \end{array}\right\}$$

Multiplicando la tercera ecuación por 2 y sumándola con la primera se tiene:

$$x + 2z = 3a + 7b + 19c \qquad [1]$$

despejando a de la segunda ecuación y sustituyendo en [1] obtenemos: $a = y - 2b - 4c$ [2],

$$x + 2z = 3(y - 2b - 4c) + 7b + 19c;$$

de donde

$$b = x + 2z - 3y - 7c;$$

sustituyendo el valor de b en [2] resulta:

$$a = 7y - 2x - 4z + 10c;$$

Por último, sustituyendo los valores obtenidos de a y b en la tercera ecuación tenemos:

$$d = x - 2y + z - 2c;$$

c cualquier número real.

Hemos encontrado, pues, valores a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ que permiten expresar cualquier vector (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores propuestos. Por tanto forman un sistema generador.

9.5. *Hallar una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ engendrado por los vectores*

$$(1, 1, 2, 0),\ (2, -1, 0, 1),\ (5, -1, 2, 2) \text{ y } (3, 0, 2, 1).$$

Solución

En primer lugar observamos que el tercer vector es combinación lineal del segundo y cuarto, es decir,

$$(5, -1, 2, 2) = (2, -1, 0, 1) + (3, 0, 2, 1)$$

y también el primer vector es combinación lineal del segundo y cuarto,

$$(1, 1, 2, 0) = (3, 0, 2, 1) - (2, -1, 0, 1).$$

Por tanto, eliminamos los dos vectores que son combinación lineal de los demás, puesto que los vectores restantes generan el mismo subespacio.

Además, los dos vectores son libres:

$$a(2, -1, 0, 1) + b(3, 0, 2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 3b = 0 \\ -a = 0 \\ 2b = 0 \\ a + b = 0 \end{array}\right\} \quad a = 0 \ \text{ y } \ b = 0$$

Por tanto, $\{(2, -1, 0, 1), (3, 0, 2, 1)\}$ es una base.

9.6. *Probar que los vectores*

$$(1, -1, 1), \quad (2, 3, 5) \quad \text{y} \quad (1, -6, 0)$$

constituyen una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar las coordenadas del vector $(1, 4, -6)$ en dicha base.

Solución

Como $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión 3, todas las bases de dicho espacio tienen tres vectores. La dimensión de un espacio vectorial fija el número máximo de vectores linealmente independientes y el número mínimo de vectores que constituyen sistema generador del mismo. En nuestro caso, cuatro vectores son siempre linealmente dependientes y dos vectores nunca pueden ser sistema generador del espacio. Como nos dan tres vectores, si probamos que son linealmente independientes necesariamente han de generar el espacio. O viceversa, si probamos que son sistema generador, tendrán que ser linealmente independientes.

No obstante, como ejercicio comprobaremos ambas condiciones.

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Probemos que si

$$a(1, -1, 1) + b(2, 3, 5) + c(1, -6, 0) = (0, 0, 0)$$

necesariamente $a = b = c = 0$. Operando tenemos

$$\left.\begin{aligned} a + 2b + c &= 0 \\ -a + 3b - 6c &= 0 \\ a + 5b \qquad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicando por 6 la primera ecuación y sumándola con la segunda resulta: $a + 3b = 0$, despejando y sustituyendo en la tercera

$$-3b + 5b = 0, \quad 2b = 0, \quad b = 0.$$

Por lo tanto,

$$a = 0 \quad \text{y} \quad c = 0.$$

Luego son linealmente independientes.

Para que formen sistema generador de $\mathbb{R}^3$ probaremos que todo vector (x, y, z) del mismo se puede expresar como combinación lineal de dichos vectores, es decir, que existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x, y, z) = a(1, -1, 1) + b(2, 3, 5) + c(1, -6, 0)$$

Operando: $\left.\begin{array}{l} x = a + 2b + c \\ y = -a + 3b - 6c \\ z = a + 5b \end{array}\right\}$

$$\begin{array}{rl} 6x = & 6a + 12b + 6c \\ y = & -a + \ \ 3b - 6c \\ \hline 6x + y = & 5a + 15b \end{array} \quad +$$

de la tercera ecuación $a = z - 5b$ [1]; sustituyendo en la anterior

$$6x + y = 5(z - 5b) + 15b = 5z - 10b,$$

de donde:

$b = \dfrac{6x + y - 5z}{-10}$, y sustituyendo en [1]

$a = \dfrac{6x + y - 3z}{2}$, despejando c en la primera ecuación

$c = \dfrac{8x + 3y - 5z}{-10}$

luego, efectivamente, forman sistema generador del espacio. Además (a, b, c) son las coordenadas del vector (x, y, z) en la base

$$\{(1, -1, 1), (2, 3, 5), (1, -6, 0)\}.$$

Por ello, para hallar las coordenadas del vector $(1, 4, -6)$ en dicha base bastará sustituir x por 1, y por 4, z por -6 en las fórmulas anteriores para obtenerlas. Las coordenadas son $(14, -4, -5)$.

9.7. *Sean los vectores de* $\mathbb{R}^2$*:*

$$u = (0, 0), \quad v = (0, 1) \quad y \quad w = (1, 1).$$

¿Cuál de los siguientes conjuntos es una base?:

a) $\{u, v\}$

b) $\{u, w\}$

c) $\{v, w\}$.

Solución

Ninguno de los conjuntos de los apartados *a)* y *b)* puede formar base puesto que el vector nulo $(0, 0)$ no puede estar presente en ningún sistema libre y, al no ser linealmente independientes los vectores, no pueden formar base.

c) Como $\mathbb{R}^2$ es de dimensión 2, probemos que forman un sistema libre y, necesariamente, serán sistema generador y, por tanto, base.

Para que formen un sistema libre ha de verificarse que los únicos escalares a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ que cumplan $a_1 v + a_2 w = \bar{0}$ sean $a_1 = a_2 = 0$.

En efecto,

$$a_1(0, 1) + a_2(1, 1) = (0, 0), \ (a_2, a_1 + a_2) = (0, 0),$$

de donde

$$a_2 = 0 \quad y \quad a_1 + a_2 = 0, \quad \text{es decir} \quad a_1 = a_2 = 0.$$

Por consiguiente, $\{v, w\}$ es una base.

9.8. *Respecto a la base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por los vectores:*

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 0, 1),$$

hallar las coordenadas de $(1, 2, 4)$.

Solución

Hay que encontrar tres números reales a, b, c que verifiquen:

$$(1, 2, 4) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1).$$

Operando tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a \\ 2 &= a + b \\ 4 &= a + b + c \end{aligned}\right\}$$

sustituyendo $a = 1$ en la segunda ecuación $b = 1$ y repitiendo la sustitución en la tercera ecuación $c = 2$.

Luego las coordenadas del vector $(1, 2, 4)$ respecto de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ son $(1, 1, 2)$.

9.9. *Hallar una base del subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$ *engendrado por los vectores*

$$(1, 3, 4, -2), \ (2, 1, 3, -1), \ (3, -1, 2, 0) \ \text{y} \ (4, -3, 1, 1).$$

Solución

Si los vectores dados son linealmente independientes formarán base ya que son sistema generador puesto que cualquier vector del subespacio es combinación lineal de dichos vectores.

Si son linealmente dependientes habrá que ir eliminando el vector o los vectores que sean combinación lineal de los demás.

Como el cuarto vector es combinación lineal de los restantes

$$(4, -3, 1, 1) = -(1, 3, 4, -2) + (2, 1, 3, -1) + (3, -1, 2, 0)$$

se elimina.

Comprobamos si los tres primeros son linealmente independientes,

$$a(1, 3, 4, -2) + b(2, 1, 3, -1) + c(3, -1, 2, 0) = (0, 0, 0, 0) \quad [1];$$

$$\left.\begin{aligned} a + 2b + 3c &= 0 \\ 3a + b - c &= 0 \\ 4a + 3b + 2c &= 0 \\ -2a - b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

De la cuarta ecuación $b = -2a$, sustituyendo en las demás:

$$\left.\begin{aligned} -3a + 3c &= 0 \\ a - c &= 0 \\ -2a + 2c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Se reduce a la ecuación $a - c = 0$.

Por tanto, son linealmente dependientes ya que para que se cumpla [1] no tienen que ser necesariamente cero los escalares a, b, c.

Eliminamos otro vector, por ejemplo el tercero.

$$a(1, 3, 4, -2) + b(2, 1, 3, -1) = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} a + 2b &= 0 \\ 3a + b &= 0 \\ 4a + 3b &= 0 \\ -2a - b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

los únicos números reales que verifican las cuatro ecuaciones son $a = b = 0$.

Luego $(1, 3, 4, -2)$ y $(2, 1, 3, -1)$ son linealmente independientes y también sistema generador del subespacio, pues los vectores eliminados son combinación lineal de éstos. Por ello, estos vectores forman una base del subespacio.

9.10. *Encontrar todas las bases del espacio vectorial* $(\mathbb{Z}/(2))^2$ *sobre* $\mathbb{Z}/(2)$.

Solución

El espacio $(\mathbb{Z}/(2))^2$ es un espacio vectorial de dimensión 2.

Las bases están formadas por dos elementos, luego habrá:

$$B_1 = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})\}$$
$$B_2 = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1})\}$$
$$B_3 = \{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\},$$

Ya que $\mathbb{Z}/(2) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ y, por tanto,

$$(\mathbb{Z}/(2))^2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}.$$

Es fácil comprobar que B_1, B_2 y B_3 son efectivamente bases.

9.11. *Probar que el conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^n$:

$$\{(1, 1, 0, ..., 0), (0, 1, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1, 1), (0, ..., 0, 1)\}$$

es una base. ¿Cuáles son las coordenadas de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *respecto a dicha base?*

Solución

El conjunto dado es un sistema libre puesto que los únicos escalares $\lambda_i \in \mathbb{R}$ que verifican

$$\lambda_1(1, 1, 0, \dots, 0) + \lambda_2(0, 1, 1, \dots, 0) + \cdots + \lambda_{n-1}(0, \dots, 0, 1, 1) + \\ + \lambda_n(0, \dots, 0, 1) = (0, \dots, 0)$$

son $\lambda_i = 0$.

En efecto, operando tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} = 0 \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \end{array}\right\}$$

como $\lambda_1 = 0$, de la segunda ecuación $\lambda_2 = 0$ y así sucesivamente todos los $\lambda_i = 0$.

Además es sistema generador puesto que todo vector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse como combinación lineal de dichos vectores. Es decir, existen $a_i \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x_1, \dots, x_n) = a_1(1, 1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, 1, 0, \dots, 0) + \cdots +$$

$$+ a_{n-1}(0, \dots, 1, 1) + a_n(0, \dots, 0, 1).$$

Operando obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & = a_1 \\ x_2 & = a_1 + a_2 \\ x_3 & = a_2 + a_3 \\ \vdots & \\ x_{n-1} & = a_{n-2} + a_{n-1} \\ x_n & = a_{n-1} + a_n \end{array}\right\}$$

Como

$$a_1 = x_1, \quad x_2 = x_1 + a_2, \quad a_2 = x_2 - x_1 \quad ; \quad x_3 = x_2 - x_1 + a_3,$$
$$a_3 = x_3 - x_2 + x_1, \cdots a_n = x_n - x_{n-1} + x_{n-2} - \cdots + (-1)^{n+1}x_1.$$

No hace falta, en este caso, comprobar que es sistema generador puesto que son n vectores libres de un espacio de dimensión n, por lo que necesariamente son sistema generador del mismo.

Por tanto, el conjunto de vectores dado es una base.

Las coordenadas del vector $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se han hallado ya, son $(a_1, a_2, ..., a_n)$ donde

$$a_i = x_i - x_{i-1} + x_{i-2} - \cdots + (-1)^{i+1}x_1.$$

9.12. *En un espacio vectorial de dimensión n, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?:*

a) Un conjunto de menos de n vectores es libre.

b) Un conjunto de n vectores es base.

c) Un conjunto de más de n vectores es ligado.

Solución

La única afirmación cierta es la *c*) ya que el número máximo de vectores que forman un sistema libre es precisamente la dimensión. Como este espacio tiene dimensión n, un conjunto con más de n vectores es ligado.

Sin embargo, las otras afirmaciones no siempre son ciertas.

a) Si tomamos un conjunto con menos de n vectores que, por ejemplo, tenga el vector $\bar{0}$, dicho conjunto es ligado.

b) Para que un conjunto sea base debe ser libre y sistema generador, luego no tienen por qué formar base n vectores sin ninguna condición adicional.

9.13. *Si u y v son dos vectores distintos y linealmente independientes de un espacio vectorial E, el subespacio vectorial de E engendrado por los vectores u, v y $u - v$, ¿qué dimensión tiene? ¿Cuál es la dimensión de $\langle u, v, u + v\rangle$?*

Solución

En ambos casos la dimensión del subespacio engendrado es 2.

Como el vector $u - v$ es combinación lineal de u y v

$$\langle u, v, u - v\rangle = \langle u, v\rangle$$

lo mismo ocurre en el segundo caso ya que $u + v$ es combinación lineal de u y v.

$$\langle u, v, u + v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Entonces $\{u, v\}$ es una base de dicho subespacio ya que son linealmente independientes.

9.14. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, ¿cuál es la dimensión de*

$$\langle (1, 3, 5),\ (1, -3, 1),\ (0, 3, 2)\rangle?$$

Solución

Observamos que $(1, 3, 5) = (1, -3, 1) + 2(0, 3, 2)$.

Por tanto, $(1, 3, 5)$ se puede eliminar y se engendra el mismo subespacio, es decir,

$$\langle (1, 3, 5),\ (1, -3, 1),\ (0, 3, 2)\rangle = \langle (1, -3, 1),\ (0, 3, 2)\rangle.$$

Veamos si estos dos últimos vectores son linealmente independientes

$$a(1,-3,1)+b(0,3,2)=0,$$

$$\left.\begin{aligned} a \quad &= 0 \\ -3a+3b &= 0 \\ a+2b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

como $a=0$, $b=0$ los vectores son linealmente independientes.

Entonces la dimensión de $\langle(1,3,5),(1,-3,1),(0,3,2)\rangle$ es 2.

9.15. *Sea K un cuerpo. K es un espacio vectorial sobre K, ¿de qué dimensión? El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, ¿de qué dimensión?*

Solución

K es un espacio vectorial sobre K de dimensión 1. Todo vector de K se puede expresar como combinación lineal de cualquier elemento de K que sea distinto de cero. Por ejemplo, una base sería $\{1\}$.

$\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2. Una base es $\{(1,0),(0,1)\}=\{1,i\}$ ya que todo número complejo $a+bi=(a,b)=$ $=a(1,0)+b(0,1)$ siendo $a,b\in\mathbb{R}$.

9.16. *Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo K de dimensión n, probar que todo sistema generador con n vectores es una base de E.*

Solución

Para que un conjunto de vectores formen una base de un espacio vectorial es necesario y suficiente que sean sistema generador libre.

En nuestro caso tenemos un sistema generador con n vectores. Para que sea base tendrá que ser libre.

Supongamos que esos n vectores son linealmente dependientes y llegaremos a una contradicción.

En efecto, si el conjunto de los n vectores es ligado, existe alguno que es combinación lineal de los demás y, por tanto, se puede eliminar puesto que los $n-1$ vectores restantes también son sistema generador del espacio.

— Si esos $n-1$ vectores son libres, ya forman base y el espacio vectorial sería entonces de dimensión $n-1$, que contradice el enunciado. Por tanto en un espacio vectorial de dimensión n, todo sistema generador con n vectores es libre y, por ello, base de dicho espacio.

— Si, por el contrario, los $n-1$ vectores restantes fueran ligados, volveríamos a argumentar como antes y entonces existe alguno que es combinación lineal de los demás y llegaríamos a la misma contradicción que en el caso anterior.

9.17. *Dados E_1 y E_2 espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo K. Considerando la estructura de espacio vectorial producto en $E_1 \times E_2$, ¿cuál es la dimensión de $E_1 \times E_2$ en función de las dimensiones de E_1 y E_2?*

Solución

Supongamos que los espacios E_1 y E_2 tienen dimensiones p y r, respectivamente.

Sean $B_1 = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ bases de E_1 y E_2, respectivamente.

Sea $x_1 \in E_1$, $x_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_pe_p$.

Sea $x_2 \in E_2$, $x_2 = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r$.

Será, entonces, $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ y expresando los vectores en función de su base respectiva:

$$(x_1, x_2) = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_p e_p, b_1 v_1 + \cdots + b_r v_r) =$$
$$= (a_1 e_1, 0) + (a_2 e_2, 0) + \cdots + (a_p e_p, 0) + (0, b_1 v_1) + \cdots + (0, b_r v_r) =$$
$$= a_1(e_1, 0) + \cdots + a_p(e_p, 0) + b_1(0, v_1) + \cdots + b_r(0, v_r).$$

Por lo tanto, cualquier vector $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores del conjunto

$$B = \{(e_1, 0), (e_2, 0), \ldots, (e_p, 0), (0, v_1), \ldots, (0, v_r)\},$$

luego B es sistema generador de $E_1 \times E_2$.

Veamos si es libre; lo será si los únicos escalares λ_i que verifican

$$\lambda_1(e_1, 0) + \lambda_2(e_2, 0) + \cdots + \lambda_p(e_p, 0) + \lambda_{p+1}(0, v_1) + \cdots + \lambda_{p+r}(0, v_r) = 0$$

son $\lambda_i = 0$.

En efecto, operando

$$(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p, \lambda_{p+1} v_1 + \cdots + \lambda_{p+r} v_r) = (0, 0)$$

es decir,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = 0$$
$$\lambda_{p+1} v_1 + \cdots + \lambda_{p+r} v_r = 0$$

Como los vectores e_i forman base, necesariamente $\lambda_i = 1, \ldots, p$ han de ser nulos. Y el mismo resultado se deduce de la segunda ecuación.

Por ello, B es una base y la dimensión de $E_1 \times E_2$ es $p + r$.

10. MATRICES Y DETERMINANTES

10.1. *Hallar m y n para que se verifique la siguiente igualdad*

$$\begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución

Sumando las matrices del primer miembro, resulta

$$\begin{pmatrix} m+2 & 2+2 \\ -1+n & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2 & 4 \\ n-1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para que las matrices sean iguales se tiene que verificar que $m + 2 = 5$ y $n - 1 = 1$, de donde

$$m = 3 \qquad n = 2.$$

10.2. *Hallar la matriz cuadrada de orden 2, A, sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos que verifica*

$$iA = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$i\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia_{11} & ia_{12} \\ ia_{21} & ia_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

igualando elementos, resulta:

$$ia_{11} = -1 \quad ; \quad ia_{12} = -i \quad ; \quad ia_{21} = i \quad ; \quad ia_{22} = 1$$

$$a_{11} = \frac{-1}{i} = \frac{-1 \cdot i}{ii} = \frac{-i}{-1} = i$$

$$ia_{12} = -i \quad ; \quad a_{12} = \frac{-i}{i} = -1$$

$$ia_{21} = i \quad ; \quad a_{21} = 1$$

$$ia_{22} = 1 \quad ; \quad a_{22} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i.$$

Por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

10.3. *Determinar dos matrices cuadradas de orden 2, A y B, que verifiquen:*

a) $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$4A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $3A + 4B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$

$$-2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Solución

a) Multiplicando la primera ecuación por -2 y sumándola a la segunda:

$$\begin{array}{r} -4A - 2B = -2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ 4A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \end{array} \quad +$$

$$-5B = -2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & -5 \end{pmatrix};$$

de donde

$$B = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el valor de B en la primera ecuación

$$2A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \; A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices pedidas son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Multiplicando la primera ecuación por 2, la segunda por 3 y sumándolas:

$$\begin{aligned} 6A + 8B &= 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \\ -6A + 9B &= 3\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad +$$

$$17B = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -24 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -27 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -17 \\ -51 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 34 & -17 \\ -51 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el valor de B en la segunda ecuación:

$$-2A + 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$-2A = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

las matrices que verifican las ecuaciones dadas son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

10.4. *Sean S_1 y S_2 los subconjuntos del espacio vectorial $M(2 \times 2)$, de las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo de los números reales, dados por:*

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Probar que son subespacios vectoriales de $M(2 \times 2)$.

Solución

Tendremos que comprobar que:

1. $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in S_1$ para todas las matrices

   $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ pertenecientes a S_1

2. $a \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in S_1$ para toda matriz

   $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ perteneciente a S_1 y $a \in \mathbb{R}$.

En efecto:

1. $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y & 0 \\ 0 & x + y \end{pmatrix},$

que es una matriz de S_1 pues tiene los elementos a_{12} y a_{21} nulos e iguales a_{11} y a_{22}.

2. $a\begin{pmatrix} x & b \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ 0 & ax \end{pmatrix}$

es también, por idéntica razón, un elemento de S_1.

Análogamente, en S_2 tendremos

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x+y & x+y \end{pmatrix}$$

es un elemento de S_2 pues tiene a_{12} nulo y los demás elementos iguales.

$a\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ ax & ax \end{pmatrix} \in S_2$ por la misma razón.

10.5. *Probar que en el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, las tres matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes.

Solución

Habrá que comprobar que existe una combinación lineal igualada a cero:

$$a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y alguno de los escalares a, b ó c es distinto de 0.

En efecto:

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & -3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -4b \\ 5b & 3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & -2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a+b & -a-4b+c \\ 2a+5b-c & -3a+3b-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ de donde}$$

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -a - 4b + c &= 0 \\ 2a + 5b - c &= 0 \\ -3a + 3b - 2c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$a = -b$ se sustituye en las demás ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} -(-b) - 4b + c &= 0 \\ 2(-b) + 5b - c &= 0 \\ -3(-b) + 3b - 2c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -3b + c &= 0 \\ 3b - c &= 0 \\ 6b - 2c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

como las tres ecuaciones son iguales

$$3b - c = 0, \qquad c = 3b$$

Por lo tanto, haciendo $a = -b$ y $c = 3b$ la combinación lineal de las tres matrices es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, por ejemplo $b = 1$, $a = -1$ y $c = 3$ satisface la ecuación anterior. Esto significa que no necesariamente los escalares son cero, luego las matrices A, B y C son linealmente dependientes.

10.6. *Determinar una matriz A de M(n × n) que verifique:*

$$3A - A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, su traspuesta será

$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, por lo tanto

$$3A - A' = \begin{pmatrix} 3a_{11} - a_{11} & 3a_{12} - a_{21} & \cdots & 3a_{1n} - a_{n1} \\ 3a_{21} - a_{12} & 3a_{22} - a_{22} & \cdots & 3a_{2n} - a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3a_{n1} - a_{1n} & 3a_{n2} - a_{2n} & \cdots & 3a_{nn} - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En esta matriz hay elementos de dos tipos

$$3a_{ii} - a_{ii} \quad \text{y} \quad 3a_{ij} - a_{ji} \quad \text{siendo} \quad i \neq j$$

Igualando elementos tendremos $3a_{ii} - a_{ii} = 1$ (son los de la diagonal principal) y $3a_{ij} - a_{ji} = 0$.

De la primera igualdad tenemos que $a_{ii} = \dfrac{1}{2}$.

Supongamos ahora que $i = 1$ y $j = 2$, por ejemplo.

Tendremos la ecuación $3a_{12} - a_{21} = 0$.

Y si $i = 2$, $j = 1$, tenemos $3a_{21} - a_{12} = 0$.

Resolviendo las ecuaciones:

$$a_{21} = 3 \cdot a_{12}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación

$$3 \cdot 3 \cdot a_{12} - a_{12} = 0, \quad 8a_{12} = 0, \quad a_{12} = 0.$$

Y este proceso será el mismo para cualquier par de valores de $i, j, i \neq j$.

Por tanto, la matriz pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 \end{pmatrix}.$$

10.7. *Sean A y B dos matrices de $M(m \times n)$. Probar que*

$$(A + B)' = A' + B'$$
$$(\lambda A)' = \lambda A', \quad \text{si} \quad \lambda \in K.$$

Solución

Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$(A + B)' = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A' + B' = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Por lo que se verifica que $(A + B)' = A' + B'$.

Análogamente se comprueba que $(\lambda A)' = \lambda A'$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\lambda A)' = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{2n} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$\lambda A' = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{2n} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

10.8. *Calcular el índice de las siguientes permutaciones de los números* 1, 2, 3 *y* 4:

a) (2 1 4 3)

b) (2 3 4 1)

c) (2 3 1 4).

Solución

a) 2 y 1, 4 y 3 forman inversión. En cambio 2 y 4, 2 y 3, 1 y 4, 1 y 3 no forman. El número de inversiones de esta permutación es 2. Por tanto, $i(2\,1\,4\,3) = (-1)^2 = 1$.

b) Forman inversión 2 y 1, 3 y 1, 4 y 1. El número de inversiones es 3. Por tanto, $i(2\,3\,4\,1) = (-1)^3 = -1$.

c) El número de inversiones es 2 pues 2 y 1, 3 y 1 forman inversión, luego $i(2\,3\,1\,4) = (-1)^2 = 1$.

10.9. *Calcular los determinantes*

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Solución

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = -1$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 2 = 18.$

10.10. *Calcular los determinantes:*

a) $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 28.422 & 28.322 \\ 28.423 & 28.323 \end{vmatrix}$.

Solución

a) $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 8+8 & 5+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$

Al ser la segunda fila suma de dos sumandos hemos descompuesto la matriz en suma de otras dos que, como tienen las 2 filas iguales, sus determinantes son cero.

b) Procediendo como en *a*):

$$\begin{vmatrix} 28.422 & 28.322 \\ 28.423 & 28.323 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 28.422 & 28.322 \\ 28.422+1 & 28.322+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 28.422 & 28.322 \\ 28.422 & 28.322 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 28.422 & 28.322 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 28.422 - 28.322 = 100.$$

10.11. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Probar:

a) $det(B) = det(A) + det(C)$

b) $det(D) = -det(A)$.

Solución

a) Como $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3+1 & 2 \\ -1 & 3+2 & 0 \\ 1 & 3+3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3+1 & 2 \\ -1 & 3+2 & 0 \\ 1 & 3+3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \det(A) + \det(B).$$

b) $\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & (-1)2 \\ -1 & 3 & (-1)0 \\ 1 & 3 & (-1)3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\det(A).$

10.12. *Calcular los determinantes*

a) $\begin{vmatrix} 1 & m+1 & n+1 \\ 1 & m+2 & n+2 \\ 1 & m+3 & n+3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & x^2 & 0 \\ 1+x & 2x & x^2 \end{vmatrix}.$

Solución

a) $\begin{vmatrix} 1 & m+1 & n+1 \\ 1 & m+2 & n+2 \\ 1 & m+3 & n+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & n+1 \\ 1 & m & n+2 \\ 1 & m & n+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & n+1 \\ 1 & 2 & n+2 \\ 1 & 3 & n+3 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & m & n \\ 1 & m & n \\ 1 & m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & n \\ 1 & 2 & n \\ 1 & 3 & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 1 & m \cdot 1 & 1 \\ 1 & m \cdot 1 & 2 \\ 1 & m \cdot 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & n \cdot 1 \\ 1 & 2 & n \cdot 1 \\ 1 & 3 & n \cdot 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= m \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De otra forma:

Sea $m + 1$ el menor de $m + 1$ y $n + 1$, entonces

$n + 1 = m + 1 + p$; análogamente

$$n + 2 = n + 1 + 1 = m + 1 + p + 1 = m + 2 + p$$
$$n + 3 = n + 2 + 1 = m + 2 + p + 1 = m + 3 + p.$$

Por tanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & m+1 & m+1+p \\ 1 & m+2 & m+2+p \\ 1 & m+3 & m+3+p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & m+1 \\ 1 & m+2 & m+2 \\ 1 & m+3 & m+3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & m+1 & p \\ 1 & m+2 & p \\ 1 & m+3 & p \end{vmatrix} = 0.$$

b) Llamemos Δ al determinante dado. Restando la tercera columna a la primera y segunda obtenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & x^2 & 0 \\ 1+x & 2x & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & x^2 & 0 \\ 1+x-x^2 & 2x-x^2 & x^2 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ 1+x-x^2 & 2x-x^2 \end{vmatrix} = 2x \cdot x(2-x) - x^2(1+x-x^2) =$$
$$= x^4 - 3x^3 + 3x^2.$$

10.13. *Calcular el determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

Desarrollando por los elementos de la segunda columna, resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i\begin{vmatrix} -i & 0 \\ 1-i & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ -i & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -i(-i-0)+1-(1+i)(1-i)=$$
$$= i^2+1-(1-i^2) = -1+1-(1+1) = -2$$

O también directamente

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-(1-i)(1+i)+i^2-0 = -2.$$

10.14. *Hallar las soluciones de las ecuaciones:*

a) $$\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ x & -4 & x \\ x & x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

b) $$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Solución

a) Restando a la primera fila la tercera

$$\begin{vmatrix} 2-x & 0 & x-2 \\ x & -4 & x \\ x & x & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sumando a la tercera columna la primera

$$\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ x & -4 & 2x \\ x & x & 2+x \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad (2-x)[-4(2+x)-2x^2] = 0;$$

$2x^3 - 16 = 0$, luego $x = 2$.

b) Sumando a la primera fila las otras tres obtenemos

$$\begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Restando la primera fila a cada una de las otras tres

$$(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando por los elementos de la primera columna

$$(x+3)(x-1)^3 = 0, \quad \text{de donde} \quad x = -3, \quad x = 1.$$

10.15. *Probar que*

a) $$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2(x^3+y^3)$$

b) $$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a)(x-d)(x-f).$$

Solución

a) Restando a la tercera fila la suma de las otras dos obtenemos

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ 0 & -2y & -2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ y & x+y & -2y \\ 0 & -2y & 2(y-x) \end{vmatrix};$$

determinante, este último, que resulta al restar a la tercera columna la suma de las otras dos. Desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$x[(x+y)2(y-x)-2y\cdot 2y]-y\cdot y2(y-x)=-2(x^3+y^3).$$

b) Restando a cada columna la columna de la derecha, empezando por la primera resulta:

$$\begin{vmatrix} x-a & a-b & b-c & c \\ 0 & x-d & d-e & e \\ 0 & 0 & x-f & f \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-a)\begin{vmatrix} x-d & d-e & e \\ 0 & x-f & f \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)(x-d)\begin{vmatrix} x-f & f \\ 0 & x \end{vmatrix} = (x-a)(x-d)(x-f)x.$$

10.16. *Calcular los determinantes:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$

Solución

a) Restando la tercera fila a la primera y segunda, obtenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-c & c-a \\ 0 & b-c & c-b \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-c & 0 \\ 0 & b-c & 0 \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix};$$

este último determinante obtenido al sumar a la tercera columna la segunda; por tanto

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} a-c & 0 \\ b-c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Sumando las tres primeras columnas a la cuarta, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & a+b+c \\ a & 0 & c & a+b+c \\ b & c & 0 & a+b+c \\ c & b & a & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & a & b & 1 \\ a & 0 & c & 1 \\ b & c & 0 & 1 \\ c & b & a & 1 \end{vmatrix} =$$

Restando la primera fila a las demás y desarrollando por los elementos de la cuarta columna, obtenemos

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & a & b & 1 \\ a & -a & c-b & 0 \\ b & c-a & -b & 0 \\ c & b-a & a-b & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c) \begin{vmatrix} a & -a & c-b \\ b & c-a & -b \\ c & b-a & a-b \end{vmatrix} =$$

Finalmente, sumando la tercera columna a la primera y restando a la tercera fila la primera, resulta, desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$= -(a+b+c) \begin{vmatrix} a+c-b & -a & c-b \\ 0 & c-a & -b \\ c+a-b & b-a & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c) \begin{vmatrix} a+c-b & -a & c-b \\ 0 & c-a & -b \\ 0 & b & a-c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -(a+b+c)(a+c-b)[(c-a)(a-c)+b^2] = \\
&= -(a+b+c)(a+c-b)[b^2-(c-a)^2] = \\
&= -(a+b+c)(a-b+c)(b+c-a)(b-c+a) = \\
&= -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).
\end{aligned}$$

10.17. *Probar que*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0.$$

Solución

Sumando la 2.ª y 3.ª columnas a la 4.ª, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

por tener dos columnas iguales.

10.18. *Sean las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

de órdenes $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente.

Se llama producto de las matrices A y B, de órdenes $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, y se designa por $A \cdot B$ a la matriz $C = (c_{ij})$ de orden $m \times p$ y $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

Hallar el producto $A \cdot B$ de las matrices siguientes, cuando sea posible:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad B = (2 \quad 0)$

c) $A \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

a) Como A es de orden 3×2 y B de 2×4, la matriz producto $A \cdot B$ es de orden 3×4 y sus elementos son

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1(-2) & 2(-1) + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-2)(-2) & 0(-1) + (-2)0 & 0 \cdot 3 + (-2)4 & 0 \cdot 1 + (-2)0 \\ 3 \cdot 1 + 5(-2) & 3(-1) + 5 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix};$$

es decir, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \\ -7 & -3 & 29 & 3 \end{pmatrix}$.

b) El orden de la matriz producto es 4×2 ya que A es de 4×1 y B de 1×2

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} (2 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 2 & -1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Al ser A de orden 3×3 y B de orden 3×2, la matriz resultante es de orden 3×2

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 & 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ -3 \cdot 1 + 0(-1) + 1 \cdot 2 & -3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 5(-1) + (-2)2 & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 17 \\ -1 & -12 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$$

d) Como A es de orden 2×4 y B de orden 3×2 no es posible efectuar el producto $A \cdot B$. En cambio, sí se puede hacer $B \cdot A$, que es de orden 3×4

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 17 & 35 & 3 \\ -3 & 87 & 77 & 19 \\ -2 & 19 & 21 & 4 \end{pmatrix}.$$

10.19. *Calcular el rango de las matrices:*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Solución

a) $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$

b) Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{y}$$

Sumando a la primera columna la segunda multiplicada por -1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -1 - 2 = -3 \neq 0$, el rango es 4.

c) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$

por lo tanto el rango es 3.

10.20. *Hallar, según los valores de a, el rango de las matrices:*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & a \end{pmatrix}.$

Solución

a) $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, el rango de la matriz es 2, independientemente del valor de a.

b) Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

restando a la cuarta fila la tercera

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} =$$

este último, sumando a la segunda fila la primera

$$= -4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} + (a-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 88 + (a-2)(-11);$$

Dependiendo del valor de a, la matriz tendrá rango 3 ó 4.

Si $88 - 11(a-2) = 0$, entonces el rango es 3. Es decir:

$$\text{Si } a = 10 \text{ el rango es } 3$$
$$\text{Si } a \neq 10 \text{ el rango es } 4.$$

10.21. *Calcular el rango de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a+b & a+b & a+b \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \end{pmatrix}$$

en función de a, b, c y d.

Solución

Restando a la cuarta columna la tercera; a la tercera la segunda y a la segunda la primera, obtenemos:

$$rg\, A = rg \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

y como

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = ab, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = abc, \ |A| = abcd.$$

Tenemos que:

— $rg(A) = 4$ si a, b, c y d son distintos de cero.

— $rg(A) = 3$ si sólo uno de ellos es cero.

(En este caso una columna de la matriz tendría todos sus elementos iguales a cero.)

— $rg(A) = 2$ si dos de ellos son iguales a cero y los otros dos distintos de cero.

(Dos columnas estarían formadas por ceros.)

— $rg(A) = 1$ si tres son cero y el otro distinto de cero.

(En este caso hay tres columnas de ceros.)

— $rg(A) = 0$ si todos son cero.

(La matriz A sería la matriz nula.)

11. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

11.1. *Dados los sistemas:*

a) $\left.\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} &= 1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$

Determinar las matrices de los coeficientes y las matrices orladas con los términos independientes de ambos sistemas. ¿Son sistemas equivalentes?

Solución

En *a*) las matrices pedidas son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (A/B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En *b*) tenemos:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (A_1/B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones y la solución de *a*) es $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, vamos a comprobar si es también solución de *b*).

No es solución puesto que $1 + 2 \neq 0$, luego los sistemas no son equivalentes.

11.2. *Dados los sistemas*

$$a)\quad \left.\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$b)\quad \left.\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Determinar las matrices de los coeficientes y las matrices orladas con los términos independientes de ambos sistemas. ¿Son sistemas equivalentes?

Solución

Las matrices de los coeficientes son:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y las matrices orladas

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para que los sistemas *a*) y *b*) sean equivalentes se tiene que cumplir que los sistemas de vectores

$$S = \{(5, 2, 3, 0), (0, 2, 1, 4)\}$$

y

$$S' = \{(0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1)\}$$

asociados a los sistemas *a*) y *b*), respectivamente, sean equivalentes.

Para ello, todo vector de un sistema se tiene que poder expresar como combinación lineal de los vectores del otro sistema.

Por ejemplo, vamos a calcular si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$(0, 1, 1, 1) = a(5, 2, 3, 0) + b(0, 2, 1, 4);$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 5a \\ 1 &= 2a + 2b \\ 1 &= 3a + b \\ 1 &= 4b \end{aligned}\right\}$$

De la primera ecuación $a = 0$ y sustituyendo en la segunda $b = \frac{1}{2}$, lo que contradice la cuarta que obliga a que $b = \frac{1}{4}$.

Por tanto, los sistemas no son equivalentes.

11.3. *Utilizando el método de Gauss estudiar y resolver los siguientes sistemas:*

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 0 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + y + 4z = 1 \end{array}\right\}.$

Solución

a) El sistema de vectores asociado es

$$\begin{array}{c} (1, 3, 0) \\ (2, 1, 5) \end{array}$$

Sumando al segundo vector el primero multiplicado por -2 se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{array}{c} (1, 3, 0) \\ (0, -5, 5) \end{array}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 0 \\ -5y = 5 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación obtenemos $y = -1$, valor que, sustituido en la primera, permite hallar $x = 3$.

Luego el sistema es compatible determinado y su única solución es: $x = 3$, $y = -1$.

b) El sistema de vectores asociado es:

$$\begin{array}{c} (1, -2, 0) \\ (2, 3, 7) \end{array}$$

Sumando al segundo vector el primero multiplicado por -2 se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{array}{l}(1, -2, 0)\\ (0, \quad 7, 7)\end{array}$$

Por consiguiente, el sistema de ecuaciones dado es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r}x - 2y = 0\\ 7y = 7\end{array}\right\}.$$

De la segunda ecuación $y = 1$, y, sustituyendo este valor en la primera, $x = 2$.

Entonces el sistema es compatible determinado y su única solución es $x = 2$, $y = 1$.

c) El sistema de vectores asociado es

$$\begin{array}{llll}(1, & 2, & -3, & 2)\\ (2, & -1, & 1, & -1)\\ (1, & 1, & 4, & 1)\end{array}$$

Sumamos al segundo vector el primero multiplicado por -2. Esta transformación será enunciada en lo sucesivo como $2.^{o}v + 1.^{er}v\cdot(-2)$.

Si, además, sumamos al tercer vector el primero multiplicado por -1 (que denotaremos $3.^{er}v + 1.^{er}v\cdot(-1)$), obtenemos el sistema de vectores equivalente

$$\begin{array}{llll}(1, & 2, & -3, & 2)\\ (0, & -5, & 7, & -5)\\ (0, & -1, & 7, & -1)\end{array}$$

Sumando al tercer vector el segundo multiplicado por -1 ($3.^{er}v + 2.^{o}v \cdot (-1)$), tenemos el sistema de vectores equivalente

$$\begin{matrix} (1, & 2, & -3, & 2) \\ (0, & -5, & 7, & -5) \\ (0, & 4, & 0, & 4) \end{matrix}$$

Entonces el sistema de ecuaciones equivalente al dado es

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 2 \\ -5y + 7z &= -5 \\ 4y \qquad &= 4 \end{aligned}\right\}$$

De la tercera ecuación $y = 1$. Sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación $z = 0$. De la primera ecuación, con los valores obtenidos de y y z, sacamos $x = 0$.

Por lo tanto, el sistema tiene una solución única $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y es compatible determinado.

11.4. *Estudiar y resolver, utilizando el método de Gauss, los siguientes sistemas:*

a)
$$\left.\begin{aligned} 7y - 10z &= 4 \\ 2x - 3y + 4z &= 4 \\ x + 2y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2y - z &= 2 \\ x - 3y + 3z &= -3 \end{aligned}\right\}$$

c)
$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 1 \\ x + 3y \quad &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Solución

a) El sistema de vectores asociado es

$$\begin{array}{l}(0,\ \ 7, -10, 4)\\(2, -3,\ \ 4, 4)\\(1,\ \ 2,\ -3, 0)\end{array}$$

Intercambiamos el primer y tercer vector, obteniendo

$$\begin{array}{l}(1,\ \ 2,\ -3, 0)\\(2, -3,\ \ 4, 4)\\(0,\ \ 7, -10, 4)\end{array}$$

Haciendo la transformación $2.^{o}v + 1.^{er}v \cdot (-2)$ tenemos el siguiente sistema de vectores equivalente

$$\begin{array}{lcl}(1,\ \ 2, -3, 0) & & (1,\ \ 2, -3, 0)\\(0, -7,\ 10, 4) & \xrightarrow{3.^{er}v+^{-}} & (0, -7,\ 10, 4)\\(0,\ \ 7, -10, 4) & & (0,\ \ 0,\ \ 0, 8)\end{array} \tag{1}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones propuesto es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r}x + 2y - 3z = 0\\-7y + 10z = 4\\0 = 8\end{array}\right\}$$

Este sistema es incompatible pues no puede ser $0 = 8$ y no tiene solución.

b) El sistema de vectores asociado es

$$\begin{array}{lcl}(1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1) & & (1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1)\\(0,\ \ 2, -1,\ \ 2) & \xrightarrow{3.^{er}v+1.^{er}v\cdot(-1)} & (0,\ \ 2, -1,\ \ 2)\\(1, -3,\ \ 3, -3) & & (0, -4,\ \ 2, -4)\end{array}$$

Dividiendo el 3.^{er} vector por 2

$$\begin{matrix}(1, & 1, & 1, & 1)\\ (0, & 2, & -1, & 2)\\ (0, & -2, & 1, & -2)\end{matrix} \xrightarrow{3.^{er}v+2.^{o}v} \begin{matrix}(1, & 1, & 1, & 1)\\ (0, & 2, & -1, & 2)\\ (0, & 0, & 0, & 0)\end{matrix}$$

Por consiguiente, el sistema de ecuaciones siguiente es equivalente al dado

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 2y-z&=2\end{aligned}\right\}$$ O, lo que es lo mismo

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1-z\\ 2y&=2+z\end{aligned}\right\}$$

De la segunda ecuación $y=\dfrac{2+z}{2}$

De la primera, sustituyendo el valor de $y, x=\dfrac{-3z}{2}$

Dándole a z un valor arbitrario t real, la solución del sistema es:

$$x=\frac{-3t}{2},\quad y=\frac{2+t}{2},\quad z=t$$

Donde, para cada valor de t, se obtiene una de las soluciones del sistema. Tiene, por tanto, infinitas soluciones.

El sistema es compatible indeterminado.

c) $$\begin{matrix}(1, & -1, & -1, & 0)\\ (2, & 2, & -1, & 1)\\ (1, & 3, & 0, & 0)\end{matrix} \xrightarrow{2.^{o}v+1.^{er}v(-1)} \begin{matrix}(1, & -1, & -1, & 0)\\ (1, & 3, & 0, & 1)\\ (1, & 3, & 0, & 0)\end{matrix} \xrightarrow{2.^{o}v+3.^{er}v(-1)}$$

$$\begin{matrix}(1, & -1, & -1, & 0)\\ (0, & 0, & 0, & 1)\\ (1, & 3, & 0, & 0)\end{matrix}$$

El sistema equivalente es

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ 0 = 1 \\ x + 3y \quad = 0 \end{array}\right\}.$$

Como la segunda ecuación es $0 = 1$, el sistema no tiene solución; es incompatible.

11.5. *Estudiar y resolver por el método de Gauss los sistemas:*

a)
$$\left.\begin{array}{rrrrr} x_1 + & 2x_2 + & x_3 & & = 2 \\ 2x_1 & & - 2x_3 + & x_4 = & 6 \\ & 4x_2 + & 3x_3 + & 2x_4 = & -1 \\ & 8x_2 + & 7x_3 + & x_4 = & 1 \end{array}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{array}{rrrrr} 2x_1 + & 3x_2 + & x_3 + & x_4 = & 1 \\ x_1 - & x_2 - & x_3 + & x_4 = & 1 \\ 3x_1 + & x_2 + & x_3 + & 2x_4 = & 0 \\ -x_1 & & + x_3 - & x_4 = & -2 \end{array}\right\}.$$

Solución

a) El sistema de vectores asociado es

$$\begin{array}{l} (1, 2, 1, 0, 2) \\ (2, 0, -2, 1, 6) \\ (0, 4, 3, 2, -1) \\ (0, 8, 7, 1, 1) \end{array} \xrightarrow{2.^{\circ}v + 1.^{er}v\cdot(-2)} \begin{array}{l} (1, 2, 1, 0, 2) \\ (0, -4, -4, 1, 2) \\ (0, 4, 3, 2, -1) \\ (0, 8, 7, 1, 1) \end{array}$$

$$\xrightarrow[4.^{\circ}v + 2.^{\circ}v\cdot(2)]{3.^{er}v + 2.^{\circ}v} \begin{array}{l} (1, 2, 1, 0, 2) \\ (0, -4, -4, 1, 2) \\ (0, 0, -1, 3, 1) \\ (0, 0, -1, 3, 5) \end{array} \xrightarrow{4.^{\circ}v + 3.^{er}v\cdot(-1)} \begin{array}{l} (1, 2, 1, 0, 2) \\ (0, -4, -4, 1, 2) \\ (0, 0, -1, 3, 1) \\ (0, 0, 0, 0, 4) \end{array}$$

Mediante las transformaciones realizadas se obtiene un sistema de ecuaciones equivalente al dado y cuya última ecuación es $0 = 4$. Por tanto, el sistema no tiene solución. Es incompatible.

b) El sistema de vectores asociado es

$$
\begin{array}{r}
(\ 2,\ \ 3,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1)\\
(\ 1,-1,-1,\ \ 1,\ \ 1)\\
(\ 3,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 0)\\
(-1,\ \ 0,\ \ 1,-1,-2)
\end{array}
\xrightarrow[\text{vectores}]{\substack{\text{intercam-}\\ \text{biamos}\\ 1.^{er} \text{ y } 4.^{o}}}
\begin{array}{r}
(-1,\ \ 0,\ \ 1,-1,-2)\\
(\ 1,-1,-1,\ \ 1,\ \ 1)\\
(\ 3,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 0)\\
(\ 2,\ \ 3,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1)
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{2.^{o}v+1.^{er}v\\ 3.^{er}v+1.^{er}v\cdot(3)\\ 4.^{o}v+1.^{er}v\cdot(2)}}
\begin{array}{r}
(-1,\ \ 0,1,-1,-2)\\
(\ 0,-1,0,\ \ 0,-1)\\
(\ 0,\ \ 1,4,-1,-6)\\
(\ 0,\ \ 3,3,-1,-3)
\end{array}
\xrightarrow{\substack{3.^{er}v+2.^{o}v\\ 4.^{o}v+2.^{o}v\cdot(3)}}
$$

$$
\begin{array}{r}
(-1,\ \ 0,1,-1,-2)\\
(\ 0,-1,0,\ \ 0,-1)\\
(\ 0,\ \ 0,4,-1,-7)\\
(\ 0,\ \ 0,3,-1,-6)
\end{array}
\xrightarrow{4.^{o}v+3.^{er}v\cdot(-1)}
\begin{array}{r}
(-1,\ \ 0,\ \ 1,-1,-2)\\
(\ 0,-1,\ \ 0,\ \ 0,-1)\\
(\ 0,\ \ 0,\ \ 4,-1,-7)\\
(\ 0,\ \ 0,-1,\ \ 0,\ \ 1)
\end{array}
$$

El sistema de ecuaciones equivalente es:

$$
\left.
\begin{array}{rcl}
-x_1 \qquad + x_3 - x_4 &=& -2\\
- x_2 \qquad\qquad &=& -1\\
4x_3 - x_4 &=& -7\\
- x_3 \qquad &=& 1
\end{array}
\right\}.
$$

De donde, $x_3 = -1$ con el que, sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos $x_4 = 3$; además, $x_2 = 1$ de la segunda ecuación y, sustituyendo los valores obtenidos en la primera ecuación, tenemos $x_1 = -2$.

Por tanto es un sistema compatible determinado y su única solución es

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 3.$$

11.6. *Utilizando el método de Gauss, estudiar y resolver en función de a los siguientes sistemas:*

a) $$\left.\begin{aligned} 3x + y + az &= 2 \\ -x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} ax - 2y \qquad &= -1 \\ 2x - y + az &= 1 \\ -x \qquad + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Solución

a) Haciendo las siguientes transformaciones en el sistema de vectores asociado

$$\begin{matrix} (\ \ 3, 1, a, 2) \\ (-1, 1, 1, 1) \\ (\ \ 1, 2, 3, 3) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{intercambiando} \\ \text{los vectores} \end{matrix} \quad \begin{matrix} (-1, 1, 1, 1) \\ (\ \ 1, 2, 3, 3) \\ (\ \ 3, 1, a, 2) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[3.^{er}v+1.^{er}v\cdot(3)]{2.^{o}v+1.^{er}v} \begin{matrix} (-1, & 1, & 1, & 1) \\ (\ \ 0, & 3, & 4, & 4) \\ (\ \ 0, & 4, & a+3, & 5) \end{matrix} \xrightarrow{3.^{er}v\cdot(3)+2.^{o}v\cdot(-4)}$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} (-1, & 1, & 1, & 1) \\ (\ \ 0, & 3, & 4, & 4) \\ (\ \ 0, & 0, & 3a-7, & -1) \end{matrix}$$

resulta el sistema de ecuaciones, equivalente al dado, siguiente:

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 3y + 4z &= 4 \\ (3a - 7)z &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

Si $3a - 7 = 0$, la tercera ecuación se convierte en $0 = 1$.

Es decir, si $a = \frac{7}{3}$, el sistema es incompatible.

Si, $3a - 7 \neq 0$, es decir, $a \neq \frac{7}{3}$, el sistema se puede resolver sin más que despejar z de la tercera ecuación y sustituyendo en la segunda y primera, resultando

$$z = \frac{-1}{3a-7}, \quad y = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3a-7}\right), \quad x = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3a-7}\right),$$

por lo que en este caso el sistema tiene una única solución y es compatible determinado.

(Para cada valor de $a \neq \frac{7}{3}$ se tiene un sistema de ecuaciones distinto, cuya solución es la arriba indicada.)

b) Procediendo como en el anterior

$$\begin{array}{llll} (\ a, & -2, & 0, & -1) \\ (\ 2, & -1, & a, & 1) \\ (-1, & 0, & 2, & 1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Cambiando} \\ \text{el 1.}^{\text{er}} \text{ y 3.}^{\text{er}} \\ \text{vector} \end{array} \quad \begin{array}{llll} (-1, & 0, & 2, & 1) \\ (\ 2, & -1, & a, & 1) \\ (\ a, & -2, & 0, & -1) \end{array}$$

$$\xrightarrow[3.^{\text{er}}v + 1.^{\text{er}}v \cdot a]{2.^{\text{o}}v + 1.^{\text{er}}v \cdot 2} \begin{array}{llll} (-1, & 0, & 2, & 1) \\ (\ 0, & -1, & a+4, & 3) \\ (\ 0, & -2, & 2a, & a-1) \end{array} \xrightarrow{3.^{\text{er}}v + 2.^{\text{o}}v \cdot (-2)}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{llll} (-1, & 0, & 2, & 1) \\ (\ 0, & -1, & a+4, & 3) \\ (\ 0, & 0, & -8, & a-7) \end{array}$$

obtenemos el equivalente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -x \qquad\quad + 2z &= 1 \\ -y + (a+4)z &= 3 \\ -8z &= a-7 \end{aligned}\right\}$$

De la tercera ecuación

$$z = \frac{-a+7}{8}$$

Sustituyendo en la segunda:

$$y = \frac{(a+4)(-a+7)}{8} - 3 = \frac{-a^2+3a+4}{8}$$

y en la primera

$$x = \frac{-a+3}{4}.$$

Por lo tanto, independientemente del valor de a, el sistema tiene una única solución, luego es compatible determinado.

11.7. *Estudiar y resolver por el método de Gauss el sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{Z}/(5)$

$$\left.\begin{aligned} \bar{2}x_1 - \bar{2}x_2 + \bar{3}x_3 &= \bar{2} \\ x_1 + x_2 \qquad\; &= \bar{3} \\ \bar{2}x_1 - x_2 + \bar{2}x_3 &= \bar{1} \end{aligned}\right\}.$$

Solución

Como los coeficientes son elementos de $\mathbb{Z}/(5)$ construimos, en primer lugar, las tablas de sumar y multiplicar

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

que utilizaremos para efectuar transformaciones en el sistema de vectores asociado al sistema de ecuaciones dado, que es:

$$\begin{array}{l}(\bar{2}, -\bar{2}, \bar{3}, \bar{2})\\ (\bar{1}, \quad \bar{1}, \bar{0}, \bar{3})\\ (\bar{2}, -\bar{1}, \bar{2}, \bar{1})\end{array}$$

Queremos hacer $\bar{0}$ la primera componente de los dos últimos vectores. Tendrá que ser:

$$x \cdot \bar{2} + \bar{1} = \bar{0} \quad \text{y} \quad x \cdot \bar{2} + \bar{2} = \bar{0}, \quad \text{respectivamente.}$$

En el primer caso, el número que sumado con $\bar{1}$, da un resultado $\bar{0}$ es $\bar{4}$ (observando la tabla $+$); por tanto, ha de ser $x \cdot \bar{2} = \bar{4}$. Observando la tabla de la multiplicación, el número que multiplicado por $\bar{2}$ da $\bar{4}$ es $\bar{2}$, por lo que $x = \bar{2}$ y el primer vector hay que multiplicarlo por $\bar{2}$ para que, sumándolo al segundo, obtengamos la primera coordenada de éste nula.

De forma análoga, en la ecuación $x\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$ se tiene que $x = \bar{4}$.

Entonces, haciendo las transformaciones $2.^{\circ}v + 1.^{er}v \cdot \bar{2}$ y $3.^{er}v + 1.^{er}v \cdot \bar{4}$, se obtiene el sistema equivalente de vectores siguiente:

$$\begin{matrix} (\bar{2}, & -\bar{2}, \bar{3}, \bar{2}) \\ (\bar{0}, & \bar{2}, \bar{1}, \bar{2}) \\ (\bar{0}, & \bar{1}, \bar{4}, \bar{4}) \end{matrix} \xrightarrow{3.^{er}v+2.^{o}v\cdot\bar{2}} \begin{matrix} (\bar{2}, & -\bar{2}, \bar{3}, \bar{2}) \\ (\bar{0}, & \bar{2}, \bar{1}, \bar{2}) \\ (\bar{0}, & \bar{0}, 1, \bar{3}) \end{matrix}$$

De $\bar{1} + \bar{2}x = \bar{0}$, tenemos $x = \bar{2}$, por tanto hemos hecho $3.^{er}v + 2.^{o}v \cdot \bar{2}$, con lo que el sistema de ecuaciones equivalente es

$$\left.\begin{aligned} \bar{2}x_1 - \bar{2}x_2 + \bar{3}x_3 &= \bar{2} \\ \bar{2}x_2 + x_3 &= \bar{2} \\ x_3 &= \bar{3} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{De donde} \\ &x_3 = \bar{3} \\ &\bar{2}x_2 = \bar{2} - x_3 = \bar{2} - \bar{3} = \bar{2} + \bar{2} = \bar{4} \end{aligned}$$

$$x_2 = \bar{2}^{-1} \cdot \bar{4} = \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{2}$$

$$\begin{aligned} \bar{2}x_1 &= \bar{2} + \bar{2}x_2 - \bar{3}x_3 = \bar{2} + \bar{2} \cdot \bar{2} - \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{2} + \bar{4} - \bar{4} = \\ &= \bar{1} + \bar{1} = \bar{2} \quad ; \quad x_1 = \bar{1} \end{aligned}$$

luego el sistema es compatible determinado y su única solución es

$$x_1 = \bar{1},\ x_2 = \bar{2},\ x_3 = \bar{3}.$$

11.8. *Estudiar y resolver los sistemas:*

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 3y - 4z &= 3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 3 \\ 2x - 6y + 4z &= 6 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ -2x + 4y - 6z &= 1 \end{aligned}\right\}.$

Solución

a) Vamos a resolverlo aplicando el teorema de Rouché. La matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

$rg\,(A) = 2$. Como la matriz orlada con la columna de los términos independientes tiene también dos filas

$$(A/B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

tiene también de rango 2. Por tanto, $rg\,(A) = rg\,(A/B) = 2$ y el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es $n = 3$, el rango es menor y, por tanto, el sistema es indeterminado.

Para resolverlo utilizaremos la regla de Cramer.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$, escribiendo el sistema

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 3 - 3z \\ 2x + 3y &= 3 + 4z \end{aligned}\right\}$$

es un sistema de Cramer. La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-3z & -2 \\ 3+4z & 3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{3(3-3z) + 2(3+4z)}{7} = \frac{15 - z}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-3z \\ 2 & 3+4z \end{vmatrix}}{7} = \frac{3 + 4z - 2(3-3z)}{7} = \frac{-3 + 10z}{7}$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado y la solución es:

$$x = \frac{15 - u}{7}$$

$$y = \frac{-3 + 10u}{7}$$

$$z = u,$$

siendo u un valor real arbitrario.

b) La matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como la segunda fila es combinación lineal de la primera, el rango de A es 1. Por la misma razón, $rg(A/B) = 1$.

Por tanto, como $rg(A) = rg(A/B)$, el sistema es compatible y, como el rango es menor que el número de incógnitas que es 3, indeterminado.

La segunda ecuación es combinación lineal de la primera y el sistema queda reducido a $x - 3y + 2z = 3$. De donde

$$z = u$$

$$y = t$$

$$x = 3t - 2u + 3$$

es la solución general de dicho sistema, para u, t valores reales arbitrarios.

c) El rango de la matriz de los coeficientes es

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = 1,$$

ya que la segunda fila es combinación lineal de la primera. Sin embargo

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{pues} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por tanto, $rg(A) \neq rg(A/B)$ y el sistema es incompatible.

11.9. *Resolver los sistemas:*

a)
$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z - 2u &= -9 \\ y - z + 2u &= 5 \\ +2z + u &= 0 \end{aligned}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z - u &= 5 \\ 2x - z + 2u &= 3 \\ x - y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Solución

a) El sistema de vectores asociado al sistema de ecuaciones es

$$\begin{matrix} (1, & -2, & 3, & -2, & -9) \\ (0, & 1, & -1, & 2, & 5) \\ (1, & 0, & 2, & 1, & 0) \end{matrix} \xrightarrow[\text{el 1.}^{\text{er}}\text{ y 3.}^{\text{er}}\text{ vector}]{\text{intercambiando}} \begin{matrix} (1, & 0, & 2, & 1, & 0) \\ (0, & 1, & -1, & 2, & 5) \\ (1, & -2, & 3, & -2, & -9) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{3.^{\text{er}}v + 1.^{\text{er}}v\cdot(-1)} \begin{matrix} (1, & 0, & 2, & 1, & 0) \\ (0, & 1, & -1, & 2, & 5) \\ (0, & -2, & 1, & -3, & -9) \end{matrix} \xrightarrow{3.^{\text{er}}v + 2.^{\text{o}}v\cdot 2}$$

$$\begin{matrix} (1, 0, & 2, 1, 0) \\ (0, 1, & -1, 2, 5) \\ (0, 0, & -1, 1, 1) \end{matrix}$$

resultando

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad 2z + \ u = 0 \\ y - \ z + 2u = 5 \\ - \ z + \ u = 1 \end{array}\right\}.$$

Tomando $z = t$, siendo t real y arbitrario, la solución general es

$$\begin{aligned} z &= t \\ u &= 1 + t \\ y &= 3 - t \\ x &= -1 - 3t \end{aligned}$$

y el sistema es compatible indeterminado, para cada valor de t se obtiene una solución del sistema.

b) Procediendo como en el anterior y reordenando los vectores

$$\begin{array}{l} (2, \ \ 0, -1, \ \ 2, 3) \\ (1, -1, \ \ 2, \ \ 0, 0) \\ (1, \ \ 2, \ \ 3, -1, 5) \end{array} \xrightarrow{3.^{er}v \times 2 + 1.^{er}v} \begin{array}{l} (2, \ \ 0, -1, 2, \ 3) \\ (1, -1, \ \ 2, 0, \ 0) \\ (4, \ \ 4, \ \ 5, 0, 13) \end{array}$$

$$\xrightarrow{3.^{er}v + 2.^{o}v \times 4} \begin{array}{l} (2, \ \ 0, -1, 2, \ 3) \\ (1, -1, \ \ 2, 0, \ 0) \\ (8, \ \ 0, \ 13, 0, 13) \end{array}$$

obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{l} 2x \qquad - z + 2u = \ 3 \\ \ x - y + \ 2z \qquad = \ 0 \\ 8x \qquad + 13z \qquad = 13 \end{array}\right\}$$

haciendo $z = t$, tenemos

$$x = \frac{13 - 13t}{8}, \quad y = \frac{13 + 3t}{8}, \quad u = \frac{-1 + 17t}{8}.$$

11.10. *Utilizando el teorema de Rouché-Frobenius estudiar, en función de m, el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{aligned} mx + y &= 1 \\ 3x - 3y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Resolver dicho sistema aplicando la regla de Cramer para los valores de m que hacen que el sistema sea de Cramer (es decir, la matriz de los coeficientes tiene determinante no nulo).

Solución

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. El rango de esta matriz varía según los valores de m, pues $|A| = -3m - 3$. Nos interesa conocer cuándo $|A| = 0$, ya que en este caso $rg(A) = 1$. Por tanto hallamos el valor de m que hace cero el determinante.

$$-3m - 3 = 0, \quad m = -1,$$

entonces:

- si $m = -1 \quad rg(A) = 1$
- si $m \neq -1 \quad rg(A) = 2$

Estudiamos, ahora, el rango de la matriz orlada con los términos independientes en función de los valores calculados para m.

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

En este caso, independientemente del valor de m, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad rg(A/B) = 2.$$

Tenemos, pues, los casos siguientes:

— Si $m = -1$ $rg(A) = 1$, $rg(A/B) = 2$. Como no son iguales el sistema es incompatible y no tiene solución.

— Si $m \neq -1$ $rg(A) = rg(A/B) = 2$ e igual al número de incógnitas. Con lo que el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Aplicando la regla de Cramer para resolver el sistema,

$$|A| = -3m - 3 \neq 0 \quad \text{ya que} \quad m \neq -1,$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{-3m-3} = \frac{7}{3+3m},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-3m-3} = \frac{4m-3}{-3m-3} = \frac{3-4m}{3+3m}.$$

Para cada valor de $m \neq -1$ se tiene un sistema de ecuaciones con su solución única arriba expresada.

11.11. *Utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius estudiar, en función de a, el sistema:*

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = a \\ x + (1+a)y + z = 2a \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{array}\right\}$$

Solución

Hallamos en primer lugar el rango de la matriz de los coeficientes, en función de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \qquad |A| = a^2$$

Si $a = 0$ $r(A) = 1$, pues $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si $a \neq 0$ $r(A) = 3$, pues $|A| \neq 0$.

Ahora hallamos el rango de la matriz

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 & 2a \\ 1 & 1 & 1+a & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 0$ $r(A/B) = 3$ ya que $|A| \neq 0$ en ese caso.

Si $a = 0$, la matriz se escribe

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y, como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad r(A/B) = 2$$

Por tanto:

— Si $a = 0$ $r(A) = 1$, $r(A/B) = 2$ y el sistema es incompatible.

— Si $a \neq 0$ $r(A) = r(A/B) = 3$ e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.

11.12. *Utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius estudiar en función de m, los siguientes sistemas:*

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + y + mz &= 6 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + my + 8z &= 6 \end{aligned}\right\}.$

Resolver dichos sistemas aplicando la regla de Cramer para los valores de m en que son sistemas de Cramer.

Solución

a) Hallamos el rango de la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & m \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad |A| = 5m - 39$$

si $m = \frac{39}{5}$, $|A| = 0$ y $rg(A) = 2$,

si $m \neq \frac{39}{5}$, $|A| \neq 0$ y $rg(A) = 3$.

El rango de la matriz

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & m & 6 \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad 3,$$

independiente del valor de m, pues $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$

Así pues,

— si $m = \frac{39}{5}$ $r(A) = 2$ y $r(A/B) = 3$, el sistema es incompatible,

— si $m \neq \frac{39}{5}$ $r(A) = r(A/B) = 3$ e igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y su única solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & m \end{vmatrix}}{5m - 39} = \frac{6m - 50}{5m - 39},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & m \end{vmatrix}}{5m - 39} = \frac{-2m + 16}{5m - 39},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{5m - 39} = \frac{2}{5m - 39},$$

b) Procediendo de forma análoga al *a*) tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & m & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad |A| = m - 4.$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & m & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

i) Si $m = 4$ $r(A) = r(A/B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

ii) Si $m \neq 4$ $r(A) = r(A/B) = 3 =$ número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

i) En este caso, al ser 2 el rango, se elimina, por ejemplo, la tercera ecuación y queda el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 2 - 2z \\ 2x + y = 2 - 3z \end{array}\right\}$$

que es un sistema de Cramer ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$

Las soluciones vienen dadas por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-2z & -2 \\ 2-3z & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6-8z}{5},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-2z \\ 2 & 2-3z \end{vmatrix}}{5} = \frac{-2+z}{5};$$

haciendo $z = t$, siendo t un número real arbitrario, la solución general del sistema es

$$x = \frac{8t-6}{-5}, \quad y = \frac{2-t}{-5}, \quad z = t.$$

ii) En este segundo caso, el sistema propuesto es de Cramer, pues $|A| = m - 4 \neq 0$ al ser $m \neq 4$. La única solución del sistema es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & m & 8 \end{vmatrix}}{m-4} = \frac{-2m+8}{m-4} = -2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}}{m-4} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & m & 6 \end{vmatrix}}{m-4} = \frac{2m-8}{m-4} = 2.$$

Para cualquier valor de m distinto de 4 la solución es $x = -2$, $y = 0$, $z = 2$.

11.13. *Discutir y resolver el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes complejos:*

$$\left.\begin{aligned} (1+i)x + iy &= 1 \\ ix \quad + (1-i)y &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Solución

La matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ i & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{tiene rango 2,}$$

pues $|A| = 3$, por tanto es un sistema de Cramer.

La solución será

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & i \\ 0 & 1-i \end{vmatrix}}{3} = \frac{1-i}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ i & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-i}{3}.$$

11.14. *Hallar a y b para que el sistema*

$$\left.\begin{aligned} ax + 2y &= 1 \\ x + 2y &= 3 \\ -x + 3y &= 2 \\ 2x + by &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sea compatible determinado.

Solución

Para que sea compatible determinado el rango debe ser igual al número de incógnitas. Como hay 2 incógnitas, éste debe ser el valor del rango de las matrices de los coeficientes y orlada.

Como

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad r(A) = 2.$$

Ahora obligamos a que

$$rg\,(A/B) = rg \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & b & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Para ello habrá que imponer la condición de que no haya ningún menor de orden 3 distinto de 0. Se tendrá que cumplir que:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & b & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $-5a - 5 = 0$ y $-5b - 10 = 0$.

$a = -1$, $b = -2$ hacen que el sistema sea compatible determinado como es inmediato comprobar.

11.15. *Estudiar los siguientes sistemas homogéneos:*

$$a)\quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\}$$

$$b)\quad \left.\begin{array}{r} x + 3y \qquad = 0 \\ 7x - 2y - 4z = 0 \\ 2x + 5y - 6z = 0 \end{array}\right\}.$$

Solución

a) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ y } |A| = 12 \neq 0$$

$rg\,(A) = 3 =$ número de incógnitas.

Por tanto, la única solución es $x = y = z = 0$.

b) De forma análoga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -23 \neq 0 \text{ y } |A| \neq 0,$$

entonces $rg\,(A) = 3$ e igual al número de incógnitas, por lo que también tiene como única solución la $(0, 0, 0)$

11.16. *Estudiar los siguientes sistemas homogéneos para cualquier valor* $a \in \mathbb{R}$:

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 5y - az = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ ax + y + 8z = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 0 \\ x + ay = 0 \\ 2x + az = 0 \end{array}\right\}.$

Solución

a) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -a \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

$$|A| = 6 - 2a = 0 \quad \text{si} \quad a = 3,$$

luego

— Si $a \neq 3$ $rg(A) = 3$ y el sistema tiene solución única nula, es decir $x = y = z = 0$.

— Si $a = 3$ $rg(A) = 2$ y resulta el sistema equivalente al dado

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 3z \\ 2x + y = 0 \end{array}\right\} \text{ que es de Cramer.}$$

Por tanto

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3z & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = -\frac{z}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3z \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-6z}{-6} = z.$$

La solución general

$$x = \frac{-t}{2}, \quad y = t, \quad z = t$$

siendo t un número real arbitrario.

En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ a & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$, $|A| = 41 - 8a$

i) Si $a \neq \frac{41}{8}$ $r(A) = 3$ y el sistema es compatible determinado y la única solución es $(0, 0, 0)$.

ii) Si $a = \frac{41}{8}$ $r(A) = 2$ entonces el sistema es compatible indeterminado y su solución general es la del sistema equivalente, que es de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= -2z \\ 2x + y &= -3z \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2z & -2 \\ -3z & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-8z}{5} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2z \\ 2 & -3z \end{vmatrix}}{5} = \frac{z}{5}$$

La solución general es

$$x = \frac{-8t}{5}, \quad y = \frac{t}{5}, \quad z = t \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$

como en todos los menores está a, calculamos en primer lugar $|A|$.

$$|A| = a^3 - 3a = a(a^2 - 3);$$

$$|A| = 0 \quad \text{si} \quad a = 0 \quad \text{ó} \quad a = \pm\sqrt{3}$$

— Si $a=0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $rg(A)=2$

— Si $a = \sqrt{3}$ ó $a = -\sqrt{3}$, $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \neq 0$ en ambos casos,

luego también $rg\,(A) = 2$.

Por tanto

— Si $a = 0$ ó $a = \pm\sqrt{3}$ $rg\,(A) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones.

— Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm\sqrt{3}$ $rg\,(A) = 3$ y el sistema es determinado con la solución trivial $x = y = z = 0$.

11.17. *Estudiar el siguiente sistema homogéneo.*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_1 + \qquad\qquad\qquad + x_n = 0 \end{array}\right\}.$$

Solución

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & & & 1 \end{pmatrix},$$

hallamos $|A|$ desarrollando por los elementos de la primera columna

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n+1} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1},$$

siendo n el número de ecuaciones y de incógnitas.

— Si n es par $|A| = 0$ y $rg(A) = n - 1$

— Si n es impar $|A| = 2 \neq 0$ y $rg(A) = n$

En el primer caso el sistema es indeterminado.

En el segundo caso el sistema es determinado y la solución es $x_i = 0$ para todo i.

También se podría hacer el estudio directamente, despejando

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \\ x_3 &= -x_2 = x_1 \\ x_4 &= -x_3 = -x_1 \\ &\vdots \\ x_n &= -x_{n-1} = (-1)^{n-1} x_1 \\ x_n &= -x_1 \end{aligned}$$

Entonces, si n es par las dos últimas ecuaciones son iguales $x_n = -x_1$. Por tanto, el sistema es indeterminado, solución distinta para cada valor real arbitrario dado a x_1.

En cambio, si n es impar, las dos últimas ecuaciones son

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x_1 \\ x_n &= -x_1 \end{aligned}\right\}$$

lo que obliga a que $x_1 = 0$ y, por ello, todas las incógnitas sean cero.

12. EL PLANO AFIN

Salvo que en el enunciado de algún ejercicio se indique lo contrario, siempre se supondrá fijado el sistema de referencia $\{O; u_1, u_2\}$ y así las coordenadas de puntos (x_1, x_2) (o (x, y)) se supondrán referidas a dicho sistema.

12.1. *Sean $O, O', A_1, \dots, A_r$ puntos del plano afín. Probar que:*

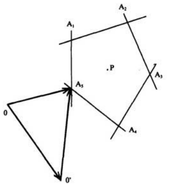
$$O + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} OA_i = O' + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} O'A_i = P.$$

El punto P se denomina baricentro del conjunto de puntos $\{A_1, \dots, A_r\}$.

Solución

Para cada A_i se verifica:

$$OA_i = OO' + O'A_i$$



Por lo tanto:

$$O + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} OA_i = O + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r}(OO' + O'A_i) =$$

$$= O + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} OO' + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} O'A_i =$$

$$= O + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} OO' + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} O'A_i =$$

$$= O + \frac{1}{r} rOO' + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} O'A_i =$$

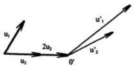
$$= O + OO' + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} O'A_i$$

Ahora bien, $O + OO' = O'$ por el axioma 1 de la definición de plano afín, luego:

$$O + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} OA_i = O' + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} O'A_i$$

12.2. *Sean $\{O; u_1, u_2\}$ y $\{O'; u_1', u_2'\}$ dos sistemas de referencia del plano afín. Si O' tiene por coordenadas $(0, 2)$ respecto a $\{O; u_1, u_2\}$ y las coordenadas respecto a $\{u_1, u_2\}$ de u_1' y u_2' son, respectivamente, $(2, 1)$, y $(1, 1)$; ¿cuáles son las coordenadas respecto a $\{O'; u_1', u_2'\}$ de un punto X cuyas coordenadas respecto a $\{O; u_1, u_2\}$ son $(3, 3)$?*

Solución



Las coordenadas de X respecto a $\{O; u_1, u_2\}$ son (3, 3), por tanto:

$$OX = 3u_1 + 3u_2$$

Por otra parte sabemos que:

$$OO' = 2u_2 \quad , \quad u'_1 = 2u_1 + u_2 \quad , \quad u'_2 = u_1 + u_2,$$

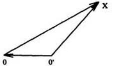
de donde:

$$OO' = 2u_2 \quad , \quad u_1 = u'_1 - u'_2 \quad , \quad u_2 = -u'_1 + 2u'_2.$$

Hemos de calcular las coordenadas de $O'X$ respecto a $\{u'_1, u'_2\}$:

$$\begin{aligned} O'X &= O'O + OX = -2u_2 + 3u_1 + 3u_2 = \\ &= 3u'_1 - 3u'_2 + (-u'_1 + 2u'_2) = 2u'_1 - u'_2. \end{aligned}$$

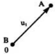
Así pues, las coordenadas de X respecto a $\{O'; u'_1, u'_2\}$ son (2, −1).



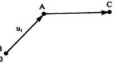
12.3. *Dados los puntos del plano afín A, B y C, cuyas coordenadas son* (1, 0), (0, 0) (1, 1), *respectivamente, respecto al sistema de referencia* $\{0; u_1, u_2\}$. *Hallar las coordenadas de todos los puntos D, de modo que A, B, C y D sean los vértices de un paralelogramo.*

Solución

Como B tiene por coordenadas (0, 0) coincide precisamente con el punto O. Como A tiene coordenadas (1, 0), el vector OA es u_1 y así tenemos:

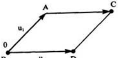


Las coordenadas de C son $(1, 1)$, luego $C = O + u_1 + u_2$:



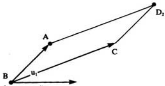
Existen dos soluciones del problema:

1. BA y AC son lados del paralelogramo:



Haciendo $AC = BD_1$ las coordenadas de D_1 son $(0, 1)$, pues: $OD_1 = BD_1 = AC = u_2$.

2. BA y BC son lados del paralelogramo:



Tomando $BA = CD_2$ las coordenadas de D_2 son $(2, 1)$, pues:

$$OD_2 = BD_2 = BC + CD_2 = OC + OA = u_1 + u_2 + u_1 = 2u_1 + u_2$$

12.4. *Sean $\{0; u_1, u_2\}$ y $\{O', u'_1, u'_2\}$ dos sistemas de referencia del plano afín. Si las coordenadas de los puntos A, B y C son $(0, 2)$, $(-1, 3)$ y $(1, 5)$ respecto a $\{O; u_1, u_2\}$ y $(0, 2)$, $(2, 0)$ y $(2, 2)$ respecto a $\{O'; u'_1, u'_2\}$. Hallar las fórmulas del cambio de sistema de referencia que expresan las coordenadas respecto a $\{O; u_1, u_2\}$, a partir de las coordenadas respecto a $\{O'; u'_1, u'_2\}$.*

Solución

Las fórmulas del cambio pedidas son de la forma:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + x'_1 b_{11} + x'_2 b_{21} \\ x_2 = a_2 + x'_1 b_{12} + x'_2 b_{22} \end{cases}$$

Habida cuenta de las coordenadas de A, B y C en los dos sistemas de referencia considerados se tiene:

$$\begin{cases} 0 = a_1 + 0b_{11} + 2b_{21} \\ 2 = a_2 + 0b_{12} + 2b_{22} \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = a_1 + 2b_{11} + 0b_{21} \\ 3 = a_2 + 2b_{12} + 0b_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = a_1 + 2b_{11} + 2b_{21} \\ 5 = a_2 + 2b_{12} + 2b_{22} \end{cases}$$

De donde:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_1 + \phantom{2b_{11} +{}} 2b_{21} \\ -1 &= a_1 + 2b_{11} \\ 1 &= a_1 + 2b_{11} + 2b_{21} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2 &= a_2 + \phantom{2b_{12} +{}} 2b_{22} \\ 3 &= a_2 + 2b_{12} \\ 5 &= a_2 + 2b_{12} + 2b_{22} \end{aligned}\right\}$$

Que son dos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas cada sistema. Resolviéndolos:

$$a_1 = -2, \quad b_{11} = \frac{1}{2}, \quad b_{21} = 1, \quad a_2 = 0, \quad b_{12} = \frac{3}{2}, \quad b_{22} = 1.$$

Por tanto, las fórmulas pedidas son:

$$\begin{cases} x_1 = -2 + \dfrac{1}{2}x_1' + x_2' \\ x_2 = \quad\ \ \dfrac{3}{2}x_1' + x_2' \end{cases}$$

12.5. *Fijado un sistema de referencia en el plano afín, determinar las coordenadas de un vector direccional de las rectas de ecuaciones:*

a) $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$

b) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-1}$

c) $2x - 3y + 1 = 0.$

Solución

a) $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$; luego $(-3, 5)$ es un vector direccional

b) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-1}$; luego $(2, -1)$ es un vector direccional

c) Tomamos A_1 y A_2 que pertenezcan a la recta:

Por ejemplo para A_1 tomamos $x = 1$ que sustituyendo en la ecuación nos da $2 - 3y + 1 = 0$, luego $y = 1$, así pues A_1 puede ser $(1, 1)$.

Del mismo modo conseguimos A_2 haciendo por ejemplo $x = 4$, luego $8 - 3y + 1 = 0$, $y = 3$, con lo que A_2 tiene coordenadas $(4, 3)$.

Un vector direccional será $A_1A_2:(4-1, 3-1) = (3, 2)$.

Otro método: directamente de la ecuación:

$$2x - 3y + 1 = 0$$

un vector direccional es $(-(-3), 2) = (3, 2)$.

12.6. *Hallar m para que la recta de ecuación $mx + 2my + m - 1 = 0$ pase por el punto de coordenadas $(2, -1)$.*

Solución

Debe verificarse $m \cdot 2 + 2m(-1) + m - 1 = 0$, luego $m = 1$.

12.7. *Hallar m para que la recta de ecuación*

$$mx + 8y + 1 = 0$$

sea paralela a la recta de ecuación:

$$3x + 2y = 0.$$

Solución

Un vector direccional de $mx + 8y + 1 = 0$ es $(-8, m)$, por otra parte un vector direccional de $3x + 2y$ es $(-2, 3)$. Si las dos partes son paralelas $(-8, m)$ debe ser proporcional a $(-2, 3)$:

$$(-8, m) = a(-2, 3),$$

de donde $-8 = -2a$, luego $a = 4$ y $m = 3a$, entonces $m = 12$.

12.8. *Hallar una ecuación continua de la recta paralela a la recta de ecuación $2x + 4y - 5 = 0$ y que pase por el punto $(3, 4)$.*

Solución

Un vector direccional de $2x + 4y - 5 = 0$ es $(-4, 2)$, por tanto una ecuación continua de la recta descrita en el enunciado es:

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-4}{2}.$$

12.9. *Hallar una ecuación implícita de la recta r paralela a*

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

que pasa por $O(0, 0)$.

Solución

Un vector direccional de

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

es $v = (-2, -1)$.

Un punto $X(x, y)$ de la recta r, debe verificar que $\{OX, v\}$ es l.d. luego:

$$\begin{vmatrix} x-0 & -2 \\ y-0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{o equivalentemente}$$

$-x + 2y = 0$, que es una ecuación implícita pedida.

O también, si $v = (-2, -1)$ es vector direccional de la recta pedida, una ecuación implícita de dicha recta es de la forma $-x + 2y + c = 0$. Como pasa por el punto $(0, 0)$ debe verificarse:

$$-0 + 2 \cdot 0 + c = 0;$$

de donde $c = 0$ y queda como ecuación $-x + 2y = 0$.

12.10. *Hallar una ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos* $(1,2)$ *y* $(1,0)$.

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{es decir:}$$

$$x - 1 = 0.$$

Otro método: un vector director es $v = (1 - 1, 2 - 0) = (0, 2)$. Por tanto una ecuación implícita de la recta es de la forma: $2x - 0y + c = 0$, es decir $2x + c = 0$.

Sustituyendo uno de los puntos por los que pasa, por ejemplo $(1, 0)$, se tiene:

$$2 \cdot 1 + c = 0 \quad ; \quad c = -2.$$

Una ecuación implícita es $2x - 2 = 0$, o equivalentemente $x - 1 = 0$.

12.11. *Hallar unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos* $A(1,0)$ *y* $B(1,1)$.

Solución

Un vector direccional de dicha recta es $AB = (0, 1)$. Por tanto, las ecuaciones pedidas son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 0 \cdot t \\ y = 0 + 1 \cdot t \end{array}\right\}, \quad \text{es decir} \quad \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \end{array}\right\}.$$

12.12. *Sean* $\{O; u_1, u_2\}$ *y* $\{O'; u'_1, u'_2\}$ *dos sistemas de referencia del plano afín tales que las fórmulas del cambio de sistema son:*

$$\begin{cases} x'_1 = 1 + x_1 + x_2 \\ x'_2 = \phantom{1 + {}} x_1 - x_2 \end{cases}$$

Dada la recta cuya ecuación es $3x_1 + 2x_2 + 1 = 0$ *respecto a* $\{O; u_1, u_2\}$. *Hallar una ecuación implícita de dicha recta respecto al sistema* $\{O'; u'_1, u'_2\}$.

Solución

Hallemos las coordenadas de dos puntos de la recta respecto al primer sistema. Por ejemplo, si consideramos $x_1 = -1$, debe ser $3(-1) + 2x_2 + 1 = 0$, luego $x_2 = 1$, así $(-1, 1)$ son las coordenadas respecto a $\{O; u_1, u_2\}$ de un punto de la recta. Del mismo modo, si $x_1 = 1$, $3 \cdot 1 + 2x_2 + 1 = 0$, de donde $x_2 = -2$, por tanto los puntos de coordenadas $(-1, 1)$ y $(1, -2)$ respecto a $\{O; u_1, u_2\}$ pertenecen a $3x_1 + 2x_2 + 1 = 0$. Las coordenadas de dichos puntos respecto a $\{O'; u'_1, u'_2\}$ son:

— para $(-1, 1)$: $\left.\begin{aligned} x'_1 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ x'_2 &= - 1 - 1 = -2 \end{aligned}\right\}$

— para $(1, -2)$: $\left.\begin{aligned} x'_1 &= 1 + 1 - 2 = 0 \\ x'_2 &= \phantom{1 +{}} 1 + 2 = 3 \end{aligned}\right\}.$

Una ecuación implícita de la recta dada respecto a $\{O'; u'_1, u'_2\}$ será:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir:} \quad 3 - 5x_1 - x_2 = 0.$$

12.13. *Hallar las posiciones relativas de los pares de rectas siguientes:*

a) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \end{cases}$; $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$

b) $x - 1 = \dfrac{y-2}{-2}$; $x = \dfrac{y}{2}$.

Solución

a) $(-1, 1)$ y $(1, -1)$ son vectores direccionales, cada uno de una de las rectas dadas. Como son proporcionales, las rectas o son paralelas o coinciden.

Haciendo $t = 0$, en la ecuación de la primera recta obtenemos $x=1$, $y=2$, es decir, el punto $(1, 2)$ pertenece a la primera recta Si sustituimos $(1, 2)$ en las ecuaciones de la segunda recta:

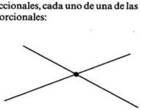
$$\left.\begin{aligned} 1 &= t \\ 2 &= 3 - t \end{aligned}\right\} \text{ que tiene por solución } t = 1.$$

Luego $(1, 2)$ es también un punto de la segunda recta. Por tanto las dos rectas coinciden.

b) $(1, -2)$ y $(1, 2)$ son vectores direccionales, cada uno de una de las rectas dadas. Como no son proporcionales:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

las rectas se cortan en un punto.



12.14. *Hallar las posiciones relativas de los pares de rectas siguientes:*

a) $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$; $\dfrac{x-1}{2} = y$

b) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$; $x + 2y + 5 = 0.$

Solución

a) Los vectores $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son vectores directores de las rectas dadas, como no son proporcionales:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

las rectas se cortan en un punto.

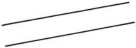
b) Los vectores $(-2, 1)$ y $(-2, 1)$ son vectores directores de las rectas dadas, como son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes. El punto de coordenadas $(1, 2)$ pertenece a la primera recta, pues para $t = 0$ en las ecuaciones de la recta se tiene:

$$x = 1 - 2 \cdot 0 = 1$$
$$y = 2 + 0 = 2.$$

Sin embargo $(1, 2)$ no pertenece a la segunda recta:

$$1 + 2 \cdot 2 + 5 \neq 0,$$

por tanto se trata de rectas paralelas.



12.15. *Hallar las posiciones relativas de los pares de rectas siguientes:*

a) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4} \quad ; \quad 4x-3y+1=0$

b) $2x-3y+1=0 \quad ; \quad 3x+4y-5=0$

c) $2x-3y+1=0 \quad ; \quad -4x+6y+2=0.$

Solución

a) Los vectores $(3, 4)$ y $(3, 4)$ son vectores directores de las rectas dadas. Como son proporcionales y el punto $(2, -1)$ que pertenece a la primera recta no pertenece a la segunda, se trata de rectas paralelas.

b) Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+1=0 \\ 3x+4y-5=0 \end{aligned}\right\}$$

es compatible determinado y por tanto las rectas se cortan en un punto.

c) En este caso $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, sin embargo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{luego} \quad \left.\begin{aligned} 2x-3y+1=0 \\ -4x+6y+2=0 \end{aligned}\right\}$$

es incompatible, con lo que las rectas son paralelas.

12.16. *Hallar en función de m las posiciones relativas de las rectas:*

$$2x+3y-2=0 \quad ; \quad 2x+my-1=0.$$

Solución

Si $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} = 2m - 6 \neq 0$, es decir si $m \neq 3$, el sistema es compatible determinado y por lo tanto las rectas se cortan en un punto.

Si $m = 3$, como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, el sistema es incompatible, luego las rectas son paralelas.

12.17. *Estudiar las posibles posiciones relativas de tres rectas en el plano afín dando condiciones necesarias y suficientes para que las tres rectas:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

se encuentren en cada una de dichas posiciones.

Solución

a) Las tres coinciden:

$$rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 1$$

b) Dos de las rectas son coincidentes y la tercera es paralela:

$$rg\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{pmatrix} = 1 \quad , \quad rg\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_k & b_k \end{pmatrix} = 1 \quad \text{y}$$

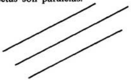
$$rg\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_k & b_k & c_k \end{pmatrix} = 2 \quad \text{donde} \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

c) Dos de las rectas son coincidentes y la tercera las corta en un punto:

$$rg\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{pmatrix} = 1 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_k & b_k \end{vmatrix} \neq 0,$$

donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

d) Las tres rectas son paralelas:



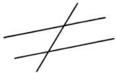
$$rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 1 \quad ; \quad rg\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{pmatrix} = 2$$

para todo par $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.

e) Dos de las rectas son paralelas y la tercera corta a las otras dos.

$$rg\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix} = 1 \quad ; \quad rg\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{pmatrix} = 2$$

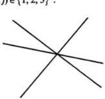
$$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_k & b_k \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{donde} \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$



f) Las tres rectas se cortan en un punto:

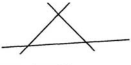
$$rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & a_j \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo par $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.



g) Las rectas se cortan sólo dos a dos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$$



para todo par $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.

12.18. *Hallar la posición relativa de la terna de rectas:*

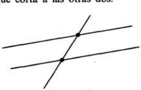
$$\begin{aligned} r_1 &: 2x + 3y + 5 = 0 \\ r_2 &: 2x + 3y \quad\;\; = 0 \\ r_3 &: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \end{aligned}$$

Solución

Las rectas r_1 y r_2 son paralelas y como

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

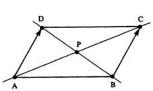
r_1 y r_3 se cortan en un punto. Se trata de dos rectas paralelas y una tercera que corta a las otras dos.



12.19. *Probar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el baricentro de los vértices (ver problema 12.1 para la definición de baricentro).*

Solución

Consideremos el paralelogramo de la siguiente figura:



Consideremos el sistema de referencia del plano afín: $\{A; AB, AD\}$. El baricentro de $\{A, B, C, D\}$ es (problema 12.1):

$$P = A + \frac{1}{4}AA + \frac{1}{4}AB + \frac{1}{4}AC + \frac{1}{4}AD;$$

como $AC = AB + BC$ y $BC = AD$ (por ser $ABCD$ vértices de un paralelogramo), se tiene $AC = AB + AD$, y por tanto:

$$P = A + \frac{1}{4}AB + \frac{1}{4}(AB + AD) + \frac{1}{4}AD =$$

$$= A + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD,$$

luego las coordenadas de P son $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Los puntos A y C tienen coordenadas respecto de $\{A; AB, AD\}$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$, respectivamente. De donde la diagonal que pasa por A y C tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir,} \quad x = y.$$

Como las coordenadas de P verifican la ecuación anterior se tiene que P pertenece a dicha diagonal.

De modo análogo, la diagonal que pasa por D y B tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir,} \quad x + y = 1.$$

Las coordenadas de P también verifican esta ecuación luego P también pertenece a esta diagonal.

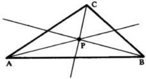
12.20. *Dado un triángulo cuyos vértices son*

$$X_1(x_1, y_1), \quad X_2(x_2, y_2), \quad X_3(x_3, y_3),$$

se define mediana del lado X_iX_j como la recta que pasa por X_k, $i \neq k \neq j$ y por el punto $\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2}\right)$ (punto medio del lado X_iX_j). Probar que las medianas de un triángulo se cortan en el baricentro de los vértices.

Solución

Consideremos el triángulo:



Tomamos el sistema de referencia $\{A; AB, AC\}$. El baricentro, P, del triángulo ABC tiene por coordenadas, respecto a dicho sistema de referencia $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, pues

$$P = A + \frac{1}{3}AA + \frac{1}{3}AB + \frac{1}{3}AC = A + \frac{1}{3}AB + \frac{1}{3}AC.$$

La mediana del lado CB pasa por los puntos de coordenadas $(0, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, luego la ecuación implícita es:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir,}$$

$x - y = 0$. Las coordenadas de $P : \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, verifican la ecuación $x - y = 0$:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Por tanto P pertenece a la mediana del lado CB.

La mediana del lado AC es:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - y = 0.$$

Como $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$, P pertenece a la mediana del lado AC.

La mediana del lado AB tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir} \quad -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}y = 0.$$

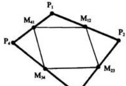
Luego P también pertenece a la mediana del lado AB.

12.21. *Probar que los segmentos que unen los puntos medios de lados consecutivos de un cuadrilátero forman un paralelogramo.*

Solución

Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 los vértices del cuadrilátero, cuyas coordenadas son:

$$P_1\colon (x_1, y_1) \quad ; \quad P_2\colon (x_2, y_2)$$
$$P_3\colon (x_3, y_3) \quad ; \quad P_4\colon (x_4, y_4)$$



Las coordenadas de los puntos medios son:

Punto medio del lado $P_1P_2 : M_{12} : \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Punto medio del lado $P_2P_3 : M_{23} : \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$

Punto medio del lado $P_3P_4 : M_{34} : \left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}\right)$

Punto medio del lado $P_4P_1 : M_{41} : \left(\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2}\right)$

Hemos de probar que $M_{12}M_{23} = M_{41}M_{34}$ y que

$M_{41}M_{12} = M_{34}M_{23}$.

Veamos que $M_{12}M_{23} = M_{41}M_{34}$.

Las coordenadas de $M_{12}M_{23}$ son

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} - \frac{y_2+y_3}{2}\right) = \left(\frac{x_1-x_3}{2}, \frac{y_1-y_3}{2}\right)$$

Las coordenadas de $M_{41}M_{34}$ son

$$\left(\frac{x_4+x_1}{2} - \frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_4+y_1}{2} - \frac{y_3+y_4}{2}\right) = \left(\frac{x_1-x_3}{2}, \frac{y_1-y_3}{2}\right)$$

que coinciden con las de $M_{12}M_{23}$, luego $M_{12}M_{23} = M_{41}M_{34}$. Análogamente se prueba que $M_{41}M_{12} = M_{34}M_{23}$.

13. EL ESPACIO AFIN

Salvo que en el enunciado se indique lo contrario, se supondrá siempre fijado el sistema de referencia $\{O; u_1, u_2, u_3\}$ y así las coordenadas (x_1, x_2, x_3) (o (x, y, z)) siempre se supondrán referidas a dicho sistema.

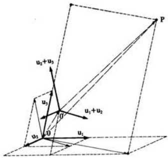
13.1. *En el sistema de referencia* $\{O; u_1, u_2, u_3\}$ *el punto P tiene por coordenadas* (3, 2, 3). *Hallar las coordenadas de P respecto al sistema*

$$\{(1, 2, 1); u_1 + u_2, u_2, u_2 + u_3\} = \{O', u_1', u_2', u_3'\}.$$

Solución

Como las coordenadas de P respecto a $\{O; u_1, u_2, u_3\}$ son (3, 2, 3), entonces

$$OP = 3u_1 + 2u_2 + 3u_3.$$



Por otra parte sabemos que

$$OO' = u_1 + 2u_2 + u_3, \quad \text{luego } O'O = -OO' = -u_1 - 2u_2 - u_3.$$

Además: $u'_1 = u_1 + u_2$, $u'_2 = u_2$ y $u'_3 = u_2 + u_3$. Como $u_2 = u'_2$, sustituyendo resulta:

$$u'_1 = u_1 + u'_2, \quad u'_3 = u'_2 + u_3, \quad \text{de donde:}$$

$$u_1 = u'_1 - u'_2, \quad u_2 = u'_2 \quad \text{y} \quad u_3 = u'_3 - u'_2, \quad \text{y así:}$$

$$O'P = O'O + OP = -u_1 - 2u_2 - u_3 + 3u_1 + 2u_2 + 3u_3 =$$
$$= 2u_1 + 2u_3 = 2(u'_1 - u'_2) + 2(u'_3 - u'_2) = 2u'_1 - 4u'_2 + 2u'_3.$$

Luego las coordenadas de P respecto a

$$\{O'; u'_1, u'_2, u'_3\} \text{ son } (2, -4, 2).$$

13.2. *Hallar unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos* $P_1(1, 0, -1)$, $P_2(1, 3, 0)$ *y* $P_3(2, -1, 3)$.

Solución

Dos vectores direccionales linealmente independientes del plano son:

$$P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = u_1 + 3u_2 - u_1 + u_3 = 3u_2 + u_3$$
$$P_1P_3 = OP_3 - OP_1 = 2u_1 - u_2 + 3u_3 - u_1 + u_3 = u_1 - u_2 + 4u_3$$

Unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por P_1, P_2 y P_3 son:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \mu \\ x_2 = 3\lambda - \mu \\ x_3 = -1 + \lambda + 4\mu \end{cases}$$

13.3. *Hallar unas ecuaciones paramétricas del plano:*

$$2x - y + 3z + 1 = 0.$$

Solución

Eligiendo valores arbitrarios para x e y y sustituyendo en la ecuación, se obtiene la tercera coordenada de un punto de dicho plano.

Por ejemplo, si $x = 0$ e $y = -2$ se tiene

$$2 \cdot 0 - (-2) + 3z + 1 = 0,$$

luego $z = -1$, obteniendo el punto $P_1(0, -2, -1)$.

Del mismo modo se construyen $P_2(1, 0, -1)$ y $P_3(1, 3, 0)$ otros dos puntos del plano.

Obsérvese que P_1, P_2 y P_3 no están alineados.

Tomamos los vectores direccionales:

$$P_1P_2 = u_1 + 2u_2, \quad P_1P_3 = u_1 + 5u_2 + u_3.$$

Unas ecuaciones paramétricas del plano son:

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -2 + 2\lambda + 5\mu \\ z = -1 + \mu \end{cases}$$

Otro método: Resolviendo $2x - y + z = -1$, como el rango de $(2, -1, 1)$ es uno: $y = 1 + 2x + z$, de donde resulta:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

13.4. *Hallar un vector direccional de la recta de ecuaciones*

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z - 1 &= 0 \\ x - \ \ y + z + 2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Solución

Basta conseguir dos puntos P_1 y P_2 que pertenezcan a la recta dada. Si, por ejemplo, para P_1 exigimos que la coordenada x sea nula entonces:

$$\left.\begin{aligned} 2y - z - 1 &= 0 \\ -y + z + 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

luego, $y = -1$, $z = -3$. Tomando ahora para P_2, $x = 1$, debe ser:

$$\left.\begin{aligned} 2y - z \qquad &= 0 \\ -y + z + 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

luego, $y = -3$, $z = -6$. Los puntos tienen por coordenadas

$$P_1(0, -1, -3) \quad \text{y} \quad P_2(1, -3, -6).$$

Un vector direccional de la recta es

$$P_1P_2 = u_1 - 3u_2 - 6u_3 + u_2 + 3u_3 = u_1 - 2u_2 - 3u_3.$$

13.5. *Hallar la intersección de la recta:*

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

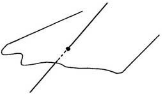
con el plano $y = 0$.

Solución

Los puntos de intersección deben verificar la ecuación del plano y las ecuaciones de la recta, por tanto:

$$0 = y = 3 - t, \quad \text{de donde} \quad t = 3:$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + t = 1 + 3 = 4 \\ y &= 0 \\ z &= 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$



La intersección es un punto de coordenadas $(4, 0, -1)$.

13.6. *Hallar una ecuación continua de la recta que pasa por los puntos de intersección del plano*

$$2x + 3y - 6z + 6 = 0$$

con los ejes OX y OY.

Solución

El eje OX es el conjunto de puntos que tienen la segunda y la tercera coordenadas 0, es decir, deben cumplir

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo $y = 0$ y $z = 0$ en la ecuación del plano, resulta $2x + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 6 = 0$, luego $x = -3$. Por tanto, P_1 es $(-3, 0, 0)$.

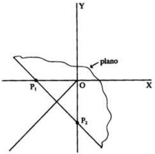
El eje OY tiene por ecuaciones $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Sustituyendo en la ecuación del plano se obtienen las coordenadas de $P_2 : (0, -2, 0)$.

Un vector direccional de la recta es P_2P_1 cuyas coordenadas son: $(-3 - 0, 0 - (-2),\ 0 - 0) = (-3, 2, 0)$. La recta además pasa por P_1, luego una ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}.$$

Atención: La expresión $\frac{z}{0}$ equivale en la ecuación anterior a $z = 0$, por esta razón y para evitar malentendidos, en el caso en que alguna componente del vector direccional sea nula es preferible escribir:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$



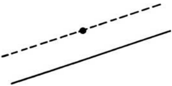
13.7. *Hallar unas ecuaciones continuas de la recta que pasa por el punto* $(3, 1, 2)$ *y es paralela a la recta:*

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + \ y - 2z &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Solución

Un vector direccional de la recta dada es:

$$\left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (1, 8, 5)$$



Una ecuación continua de la recta descrita es:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-2}{5}.$$

13.8. *Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por el punto* $(1, 1, 1)$ *y contiene a la recta*

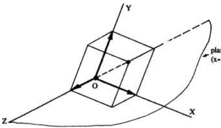
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Solución

Tomemos dos puntos distintos de la recta $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, por ejemplo, (0, 0,1) y (0, 0, 0). Como el punto de coordenadas (1, 1, 1) no pertenece a la recta r, los puntos (0, 0, 1), (0, 0, 0) y (1, 1, 1) determinan un único plano que es precisamente el plano del que nos piden una ecuación implícita;

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

que es equivalente a $x - y = 0$.



13.9. *Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por* (1, 0, 1) *y es paralelo a las rectas:*

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}.$$

Solución

Dos vectores directores de las rectas dadas son:

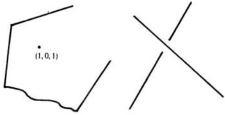
$$(1, 2, -1) \quad \text{y} \quad (2, 3, 4) \quad \text{respectivamente.}$$

Una ecuación implícita del plano que pasa por $(1, 0, 1)$ y es paralelo a las rectas dadas es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-0 & 2 & 3 \\ z-1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{equivalentemente:}$$

$$11(x-1) - 6y - (z-1) = 0, \quad \text{es decir:}$$

$$11x - 6y - z - 10 = 0.$$



13.10. *Hallar una ecuación implícita del plano que contiene a la recta:*

$$r_1 : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

y es paralelo a la recta:

$$r_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Solución

El haz de planos H de arista r_1 tiene por ecuaciones:

$$s(x + y + z + 1) + t(2x - y + 3z - 2) = 0,$$

es decir:

$$(s + 2t)x + (s - t)y + (s + 3t)z + (s - 2t) = 0.$$

La recta r_2 tiene un vector director con coordenadas:

$$(2, 1, 1).$$

El plano solución del ejercicio, π, será un plano de H paralelo a r_2. Llamemos π' a un plano paralelo a π que pase por el origen, entonces, π' tiene una ecuación:

$$(s + 2t)x + (s - t)y + (s + 3t)z = 0,$$

donde s y t verifican $(s + 2t)2 + (s - t)1 + (s + 3t)1 = 0$, pues π' pasa por el punto $(2, 1, 1)$ ya que pasa por $(0, 0, 0)$ y tiene a $(2, 1, 1)$ en el subespacio dirección. Así, $4s + 6t = 0$, luego $s = -\dfrac{3}{2}t$ y π' tiene por ecuación:

$$\left(-\frac{3}{2}t + 2t\right)x + \left(-\frac{3}{2}t - t\right)y + \left(-\frac{3}{2}t + 3t\right)z = 0,$$

equivalentemente: $tx - 5ty + 3tz = 0$, o bien $x - 5y + 3z = 0$, para $t = 2$ y $s = -3$. Una ecuación de π es por tanto:

$$x - 5y + 3z - 7 = 0.$$

13.11. *Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por el punto* $(3, 0, 1)$ *y es paralelo al plano*

$$3x - 2y + 5z + 1 = 0.$$

Solución

Al ser paralelo al plano $3x - 2y + 5z + 1$, el plano solución tiene una ecuación del tipo:

$$3x - 2y + 5z + K = 0, \quad \text{donde} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Como además dicho plano debe pasar por $(3, 0, 1)$, se verifica:

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + K = 0, \quad \text{luego}$$
$$K = -14.$$

Así, una ecuación del plano descrito en el enunciado es:

$$3x - 2y + 5z - 14 = 0.$$

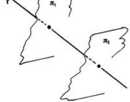
13.12. *Hallar los extremos del segmento de la recta*

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

comprendido entre los planos:

$$\pi_1 : 2x - y + 3z - 6 = 0 \quad y \quad \pi_2 : 2x - y + 3z - 10 = 0.$$

Solución



El punto de $r \cap \pi_1$ debe pertenecer a r, luego tiene coordenadas de la forma $(2 - t, -3, 1 + t)$ y como además pertenece a π_1 se debe verificar:

$$2(2 - t) - (-3) + 3(1 + t) - 6 = 0,$$

así pues $4 + t = 0$, luego $t = -4$ y sustituyendo en las ecuaciones de la recta, las coordenadas de uno de los extremos son $(6, -3, -3)$.

Del mismo modo, el punto de $r \cap \pi_2$ tiene coordenadas de la forma $(2 - t, -3, 1 + t)$ y verifica:

$$2(2 - t) - (-3) + 3(1 + t) - 10 = 0,$$

de donde $t = 0$ y las coordenadas del segundo punto son $(2, -3, 1)$.

13.13. *Hallar la posición relativa de los pares de planos:*

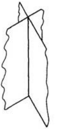
a) $x = 0 \quad ; \quad y + z = 0$

b) $\begin{cases} x = \phantom{1 + {}} s + t \\ y = 1 + s + t \\ z = \phantom{1 + s + {}} t \end{cases} \quad ; \quad x - y = 0.$

Solución

a) Para estudiar la posición relativa hemos de discutir el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$



El rango de la matriz de los coeficientes es

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

y dado que el sistema es homogéneo existen infinitas soluciones.

Luego existen infinitos puntos que pertenecen a la intersección de ambos planos. Como los planos son distintos (pues el rango de la matriz de los coeficientes es 2) se trata de dos planos que se cortan en una recta.

b) Sustituyendo las ecuaciones paramétricas del primer plano en la ecuación del segundo obtenemos:

$$s + t - (1 + s + t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 = 0$$

que es contradictorio. Por tanto, los dos planos no tienen ningún punto en común, luego son paralelos.

13.14. *a) Hallar la posición relativa del plano y la recta:*

$$x + y + z = 0$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 1 \\ x + y \quad &= -1 \end{aligned}\right\}$$

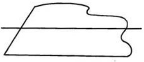
b) Idem para:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y-z=0 \\ x \quad\quad +2z=0 \end{array}\right\} .$$

Solución

a) Hemos de discutir el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ z=\ \ 1 \\ x+y \quad\ =-1 \end{array}\right\} .$$



Como $rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

dicho sistema es compatible indeterminado, así pues, la recta está contenida en el plano.

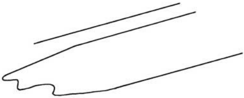
b) Estudiamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\ z=1 \\ y-\ z=0 \\ x \quad\quad +2z=0 \end{array}\right\} .$$

En este caso

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

luego el sistema es incompatible, es decir no tiene solución. El plano y la recta no tienen puntos en común, luego la recta es paralela al plano.



13.15. *Hallar la posición relativa de la recta:*

$$\left.\begin{aligned} 5x - 3y + 2z - 5 &= 0 \\ 2x - y - z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

con el plano $x - y - 4z - 3 = 0$.

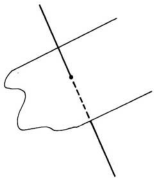
Solución

Tenemos que estudiar el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 5x - 3y + 2z &= 5 \\ 2x - y - z &= 1 \\ x - y - 4z &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

$$\text{Como } rg\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = 3 = rg\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

el sistema es compatible determinado. La recta corta al plano en un punto, la única solución del sistema es el punto de corte.



13.16. *Determinar los pares de números reales* (a, b) *para los que la recta:*

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

está contenida en el plano

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu. \\ z = -b - 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

Solución

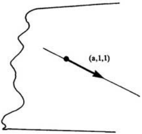
Un vector direccional de la recta, por ejemplo $(a, 1, 1)$, debe ser también vector direccional del plano. Luego,

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{de donde } a = 1.$$

Por otra parte, exigimos que un punto cualquiera de la recta, por ejemplo $(0, 0, -1)$, pertenezca al plano:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \lambda \\ 0 = \mu \\ -1 = -b - 2\lambda + 3\mu \end{array}\right.$$

luego $b = 1$.



13.17. *Estudiar la posición relativa de los pares de rectas:*

a) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

Solución

a)

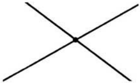
El sistema $\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$

es claramente incompatible. Así, las rectas son paralelas o se cruzan.

Un vector direccional de la primera recta debe verificar $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, tomemos, por ejemplo, $(0, 1, 0)$. Un vector direccional de la segunda debe verificar $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, por ejemplo $(1, 0, 0)$. Como no son proporcionales, las rectas no son paralelas, luego se cruzan.

b)

El sistema $\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$



tiene una única solución: $(0, 0, 0, 1)$. Las rectas se cortan en dicho punto.

13.18. *Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto* $P(1, 0, 2)$ *y se apoya en las rectas que se cruzan:*

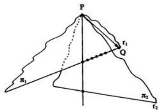
$$r_1 : \frac{x}{3} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z}{1}$$

$$y$$

$$r_2 : \frac{x + 1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Solución

Sea π_1 el plano que contiene a P y a r_1 y π_2 el plano que contiene a P y a r_2. La recta solución es la intersección de π_1 con π_2.



π_1 pasa por P, tiene un vector direccional que es vector direccional de r_1, por ejemplo $(3, 1, 1)$ y otro vector direccional será PQ donde Q es un punto cualquiera de r_1, por ejemplo $(0, -2, 0)$. Así una ecuación implícita de π_1 es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0-1 \\ y-0 & 1 & -2-0 \\ z-2 & 1 & 0-2 \end{vmatrix} = 0, \text{ equivalentemente:}$$

$$y - z + 2 = 0$$

Del mismo modo π_2 pasa por P, tiene un vector direccional que es vector direccional de r_2, por ejemplo $(6, -2, 1)$ y otro vector direccional será PQ' donde Q' es un punto cualquiera de r_2, por ejemplo $(-1, 0, 0)$. Una ecuación implícita de π_2 es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 6 & -1-1 \\ y-0 & -2 & 0-0 \\ z-2 & 1 & 0-2 \end{vmatrix} = 0, \text{ equivalentemente:}$$

$$2x + 5y - 2z + 2 = 0$$

La recta solución tiene por ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} y - z + 2 = 0 \\ 2x + 5y - 2z + 2 = 0 \end{array}\right\}.$$

13.19. *Dados dos puntos*

$$P(x_1, y_1, z_1) \quad y \quad Q(x_2, y_2, z_2),$$

llamamos punto medio del segmento PQ al punto de coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Un tetraedro (ver figura) es una figura en el espacio que consta de cuatro puntos no coplanarios, P_1, P_2, P_3 y P_4 que se llaman vértices del tetraedro; seis segmentos

$$P_iP_j, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

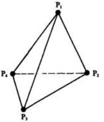
llamados aristas del tetraedro y cuatro triángulos

$$P_iP_jP_k, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\},$$

llamados caras del tetraedro.

Dos aristas P_iP_j y $P_{i'}P_{j'}$, de un tetraedro se dice que son aristas opuestas si $\{i, j, i', j'\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

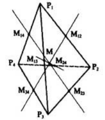
Probar que los segmentos que unen los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro se cortan en su punto medio.



Por ejemplo: Las aristas P_1P_2 y P_3P_4 son opuestas.

Solución

Sean los vértices del tetraedro:



$P_1:(x_1, y_1, z_1)$

$P_2:(x_2, y_2, z_2)$

$P_3:(x_3, y_3, z_3)$

$P_4:(x_4, y_4, z_4)$

Los puntos medios de las aristas P_1P_2 y P_4P_3 tienen coordenadas:

$$M_{12}:\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$$M_{43}:\left(\frac{x_4+x_3}{2}, \frac{y_4+y_3}{2}, \frac{z_4+z_3}{2}\right).$$

Y el punto medio de $M_{12}M_{43}$ tiene por coordenadas:

$$M:\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

Análogamente se obtienen las coordenadas de M como punto medio de $M_{14}M_{23}$ y $M_{13}M_{24}$.

14. POLINOMIOS

14.1. *Dado n, número natural, probar que el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n, $K_n[X]$, es un subespacio vectorial de $K[X]$. Encontrar una base de $K_n[X]$.*

¿Cuál es la dimensión de $K_n[X]$?

Solución

Para probar que $K_n[X]$ es subespacio vectorial de $K[X]$ hemos de comprobar que para todo par de polinomios $A, B \in K_n[X]$, se verifica $A + B \in K_n[X]$ y para cada $a \in K$ y $A \in K_n[X]$ se verifica $aA \in K_n[X]$.

Sean $A, B \in K[X]$, entonces

$$\text{grad}\,(A + B) \leqslant \max\,(\text{grad}\,A, \text{grad}\,B)$$

es decir, el grado de la suma de dos polinomios es a lo más el grado del polinomio sumando que posee mayor grado.

Así, si $\text{grad}\,A \leqslant n$ y $\text{grad}\,B \leqslant n$, es decir, $A, B \in K_n[X]$, entonces $\text{grad}\,(A + B) \leqslant n$, luego $A + B \in K_n[X]$.

Si $a \in K$ y $A \in K_n[X]$, si $a \neq 0$ $\text{grad}\,aA = \text{grad}\,A \leqslant n$ luego $aA \in K_n[X]$ y si $a = 0$ entonces $0A = 0 \in K_n[X]$.

Por tanto, $K_n[X]$, es un subespacio vectorial de $K[X]$.

El conjunto $\mathscr{B} = \{1, X, ..., X^n\}$ es una base de $K_n[X]$. En efecto:

— $\mathscr{B}$ es libre: Si $a_0 \cdot 1 + a_1 X + \cdots + a_n x^n = 0$ entonces $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

— $\mathscr{B}$ es sistema generador: Si $A \in K_n[X]$, $A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, luego A es combinación lineal de elementos de $\mathscr{B}$.

Como $\mathscr{B}$ es base de $K_n[X]$ la dimensión es $n + 1$.

14.2 *Probar que el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en cualquier cuerpo K, K[X], no tiene dimensión finita. Es decir, no existe ninguna base $\{A_1, \ldots, A_r\}$ con $A_1, \ldots, A_r \in K[X]$, siendo I un número natural.*

Solución

Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\{A_1, \ldots, A_r\}$ base de $K[X]$. Cualquier combinación lineal $a_1 A_1 + \cdots + a_r A_r$, donde $a_1, \ldots, a_r \in K$, verifica

$$\operatorname{grad}(a_1 A_1 + \cdots + a_r A_r) \leqslant \max(\operatorname{grad} A_1, \ldots, \operatorname{grad} A_r) = m.$$

Con lo cual cualquier polinomio de $K[X]$ cuyo grado supere a m no se puede expresar como combinación lineal de $A_1, \ldots, A_r$, en contradicción con el hecho de ser $\{A_1, \ldots, A_r\}$ base.

14.3. *Hallar el producto de los siguientes pares de polinomios:*

a) $A = x^2 + x + 1, \quad B = x^2 - 1$

b) $A = 2x^2 + 5x - 1, \quad B = x^3 + x^2 + 1.$

Solución

a)

$$
\begin{array}{r}
x^2 + x + 1 = A \\
x^2 - 1 = B \\
\hline
- x^2 - x - 1 \\
x^4 + x^3 + x^2 \qquad\qquad \\
\hline
x^4 + x^3 \qquad\quad - x - 1 = AB
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + 5x - 1 = A \\
x^3 + x^2 + 1 = B \\
\hline
2x^2 + 5x - 1 \quad\;\; \\
2x^4 + 5x^3 - x^2 \qquad\qquad\qquad \\
2x^5 + 5x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
\hline
2x^5 + 7x^4 + 4x^4 + x^2 + 5x - 1 = AB
\end{array}
$$

14.4. *a) Dividir el polinomio* $x^6 + 3x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 2$ *por el polinomio*

$$x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1.$$

b) Dividir el poliniomio $1 + x + x^2 + x^3$ *por* $x - i$.

c) Dividir el polinomio $4x^3 + x^2$ *por* $x + i$.

Solución

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 \qquad + 3x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 2 & x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1 \\
-x^6 - x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{2-2}
\hline
-x^5 + x^4 \qquad + 5x^2 - 3x + 2 & x^2 - x + 2 \\
x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 + x \qquad & \\
\hline
2x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x + 2 & \\
-2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x - 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + \qquad x^2 + \qquad x + 1 & x - i \\
-x^3 + \qquad ix^2 \qquad\qquad\qquad & \\ \cline{2-2}
\hline
(1+i)x^2 + \qquad x + 1 & x^2 + (1+i)x + i \\
-(1+i)x^2 - (1-i)x \qquad & \\
\hline
ix + 1 & \\
-ix - 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{r|l}
4x^3 + \quad x^2 \qquad\qquad\qquad & x + i \\
-4x^3 - 4ix^2 \qquad\qquad\qquad & \\ \cline{2-2}
\hline
(1-4i)x^2 \qquad\qquad & 4x^2 + (1-4i)x + (-4-i) \\
-(1-4i)x^2 - (4+i)x \qquad & \\
\hline
(-4-i)x \qquad & \\
-(-4-i)x - 1 + 4i & \\
\hline
-1 + 4i & = \text{RESTO}
\end{array}
$$

14.5. *Calcular m para que el resto de la división del polinomio* $x^3 + mx^2 - 2x + m$ *por* $x - 1$ *sea* 1.

Solución

En primer lugar efectuaremos la división y después impondremos la condición de que el resto sea 1.

$$
\begin{array}{lll|l}
x^3 + mx^2 & -2x + m & & x - 1 \\
\cline{4-4}
-x^3 + x^2 & & & x^2 + (m+1)x + (m-1) \\
\cline{1-3}
\quad (m+1)x^2 & -2x + m & & \\
\quad -(m+1)x^2 & +(m+1)x & & \\
\cline{1-3}
& (m-1)x \ + m & & \\
& -(m-1)x \ + m & -1 & \\
\cline{1-3}
& & 2m - 1 & = \text{RESTO}
\end{array}
$$

Como RESTO $= 1 = 2m - 1$, debe ser $m = 1$.

14.6. *Calcular el resto de la división de*

$$A = (x - 3)^{2n} + (x - 2)^n + 2 \quad \text{por} \quad B = (x - 3)(x - 2).$$

Solución

Como B tiene grado 2, el resto de la división debe tener a lo más grado 1, supongamos que dicho resto es:

$$R = ax + b.$$

Entonces:

$$(x - 3)^{2n} + (x - 2)^n + 2 = (x - 3)(x - 2)Q + ax + b,$$

donde Q es el polinomio cociente.

Sean A^*, B^*, Q^* y R^* las funciones polinómicas correspondientes a los polinomios A, B, Q y R respectivamente.

Como $A = BQ + R$ también se tiene:

$$A^* = B^*Q^* + R^*$$

Hallando $A^*(2)$ y $A^*(3)$:

$$A^*(2) = (-1)^{2n} + 2 = 3 = (B^*Q^* + R^*)(2) = 0 + R^*(2) = 2a + b$$
$$A^*(3) = (1)^n + 2 = 3 = (B^*Q^* + R^*)(3) = 0 + R^*(3) = 3a + b$$

Obtenemos así el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2a + b = 3 \\ 3a + b = 3 \end{aligned}\right\},$$

de donde $a = 0$ y $b = 3$. Por tanto: $R = 3$.

14.7. *Hallar el máximo común divisor de los polinomios:*

a) $A = x^6 + x^5 + 2x^3 + x^2 + 1$ *y* $B = x^5 + x^4 - x^3 - 1.$

b) $A = x^5 - x^4 + x^2 - 1$ *y* $B = x^4 - x^3 - x + 1.$

Solución

a) Dividiendo A por B se obtiene:

$$\begin{array}{r|l}
x^6 + x^5 + + 2x^3 + x^2 + 1 & x^5 + x^4 - x^3 \quad -1 \\ \cline{2-2}
-x^6 - x^5 + x^4 + x & x \\ \cline{1-1}
x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 &
\end{array}$$

entonces

$$\text{m.c.d.}(A, B) = \text{m.c.d.}(x^5 + x^4 - x^3 - 1,\ x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1)$$

Dividiendo de nuevo:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + x^4 - x^3 \qquad\qquad - 1 & x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^5 - 2x^4 - x^3 - x^2 - x \quad & x - 1 \\ \cline{1-1}
-x^4 - 2x^3 - x^2 - x - 1 & \\
x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Por tanto: $\text{m.c.d.}(A, B) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$

b) Dividiendo A por B tenemos:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 - x^4 \qquad + x^2 \quad - 1 & x^4 - x^3 - x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^5 + x^4 \qquad + x^2 - x \quad & x \\ \cline{1-1}
2x^2 - x - 1 &
\end{array}$$

luego $\text{m.c.d.}(A, B) = \text{m.c.d.}(x^4 - x^3 - x + 1, 2x^2 - x - 1)$,

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 \qquad - x + 1 & 2x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \qquad\qquad & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 & \\
\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \quad & \\ \cline{1-1}
\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1 & \\
-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} & \\ \cline{1-1}
-\frac{9}{8}x + \frac{9}{8} &
\end{array}
$$

por tanto $\text{m.c.d.}(A, B) = \text{m.c.d.}\left(2x^2 - x - 1, -\frac{9}{8}x + \frac{9}{8}\right) =$
$= \text{m.c.d.}(2x^2 - x - 1, x - 1)$

Por último:
$$
\begin{array}{r|l}
2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-2x^2 + 2x \quad & 2x + 1 \\ \cline{1-1}
x - 1 & \\
-x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Con lo cual $\text{m.c.d.}(A, B) = x - 1$.

14.8. *Probar que los polinomios*

$$A = x^6 + 1 \quad y \quad B = x^4 + 1$$

son primos entre sí en $\mathbb{R}[x]$. *Calcular* P *y* $Q \in \mathbb{R}[x]$ *tales que* $AP + BQ = 1$. *(Igualdad de Bezout.)*

Solución

Dos polinomios son primos si su máximo común divisor es uno. Dividamos A por B:

$$\begin{array}{rr|l}
x^6 & +1 & x^4 \quad +1 \\ \cline{3-3}
-x^6 & -x^2 & x^2 \\ \cline{1-2}
 & -x^2+1 &
\end{array}$$

Entonces m.c.d. $(A, B) =$ m.c.d. $(x^4 + 1, -x^2 + 1)$, dividiendo de nuevo:

$$\begin{array}{rr|l}
x^4 & +1 & -x^2+1 \\ \cline{3-3}
-x^4 & +x^2 & -x^2-1 \\ \cline{1-2}
 & x^2+1 & \\
 & x^2-1 & \\ \cline{1-2}
 & 2 &
\end{array}$$

Así pues,

$$\text{m.c.d.}\,(A, B) = \text{m.c.d.}\,(-x^2 + 1, 2) = \text{m.c.d.}\,(-x^2 + 1, 1) = 1,$$

es decir, A y B son primos entre sí.

Calculamos ahora $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tales que $AP + BQ = 1$.

De la división de A por B se tiene:

$$A = Bx^2 - x^2 + 1 \tag{I}$$

y de la segunda división:

$$B = (-x^2 + 1)(-x^2 - 1) + 2 \qquad \text{(II)}$$

Despejando en (I):

$$-x^2 + 1 = A - Bx^2$$

y sustituyendo en (II):

$$B = (A - Bx^2)(-x^2 - 1) + 2;$$

$$2 = A(x^2 + 1) + B(-x^4 - x^2 + 1);$$

$$1 = A\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) + B\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right).$$

Por tanto, $P = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ y $Q = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

14.9. *Hallar el mínimo común múltiplo de los polinomios:*

$$A = x^4 - 4x^2 - 5 \quad y \quad B = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Solución

Hallamos primero el máximo común divisor. Para ello dividimos A por B:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad - 4x^2 \qquad - 5 & x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x \qquad & x + 2 \\ \cline{1-1}
2x^3 - 5x^2 + 2x - 5 & \\
-2x^3 + 4x^2 - 2x + 4 & \\ \cline{1-1}
-x^2 \qquad - 1 &
\end{array}$$

Entonces

$$\text{m.c.d.}\,(A, B) = \text{m.c.d.}\,(B, -x^2 - 1) = \textit{m.c.d.}\,(B, x^2 + 1).$$

Dividiendo B por $x^2 + 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +x & -2 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & -x & & x-2 \\ \cline{1-4}
& -2x^2 & & -2 & \\
& 2x^2 & & +2 & \\ \cline{1-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

luego m.c.d. $(A, B) = x^2 + 1$. Dividiendo los polinomios A y B por m.c.d.(A, B) se obtiene:

$$\begin{array}{rrr|l}
x^4 & -4x^2 & -5 & x^2+1 \\ \cline{4-4}
-x^4 & -x^2 & & x^2-5 \\ \cline{1-3}
& -5x^2 & -5 & \\
& 5x^2 & +5 & \\ \cline{1-3}
& & 0 &
\end{array}$$

luego $A = (x^2 - 5)(x^2 + 1) = A'(x^2 + 1)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +x & -2 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & -x & & x-2 \\ \cline{1-4}
& -2x^2 & & -2 & \\
& 2x^2 & & 2 & \\ \cline{1-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

luego $B = (x - 2)(x^2 + 1) = B'(x^2 + 1)$.

Como m.c.m. $(A, B) =$ m.c.d. $(A, B)A'B'$ se tiene:

$$\text{m.c.m.}\,(A, B) = (x^2 + 1)(x^2 - 5)(x - 2).$$

14.10. *Estudiar la irreducibilidad del polinomio* $x^2 + 2$ *de* $K[x]$, *donde:*

a) $K = \mathbb{C}$.

b) $K = \mathbb{Q}$.

c) $K = \mathbb{Z}/(3)$.

Solución

a) Las raíces de $x^2 + 2$ vienen dadas al resolver la ecuación $x^2 + 2 = 0$, luego $x = \pm\sqrt{2}i$. Por tanto, $x^2 + 2$ se factoriza así: $x^2 + 2 = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$ y no es irreducible.

b) $x^2 + 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ por ser el grado 2 y no tener raíces en $\mathbb{Q}$ (las raíces son complejas).

c) Las raíces de $F = x^2 + 2$ en $\mathbb{Z}/(3)$ se calculan aplicando la función F^* a todos los elementos de $\mathbb{Z}/(3)$:

$F^*(\bar{1}) = \bar{1}^2 + \bar{2} = \bar{0}$, luego $\bar{1}$ es raíz.

$F^*(\bar{2}) = \bar{2}^2 + \bar{2} = \bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$, luego $\bar{2}$ es raíz.

$F^*(\bar{0}) = \bar{0}^2 + \bar{2} = \bar{2} \neq 0$.

Por tanto en $\mathbb{Z}/(3)[x]$ se tiene:

$$x^2 + \bar{2} = (x - \bar{1})(x - \bar{2}).$$

14.11. *Estudiar la irreducibilidad del polinomio*

$$x^4 - x^2 - 2$$

a) *en* $\mathbb{C}[x]$

b) *en* $\mathbb{R}[x]$

c) *en* $\mathbb{Q}[x]$

d) *en* $\mathbb{Z}/(p)[x]$, *donde* p *es un entero primo.*

Solución

Obsérvese que si igualamos a cero obtenemos

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

que es una ecuación bicuadrada. Haciendo $t = x^2$, tenemos una ecuación de segundo grado:

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Sus raíces son 2 y -1. Por tanto:

$$t^2 - t - 2 = (t - 2)(t + 1).$$

Sustituyendo t por x^2 obtenemos:

$$x^4 - x^2 - 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 1).$$

La factorización anterior es válida en $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}(p)$, luego el polinomio no es irreducible en ninguno de los cuatro casos.

14.12. *Descomponer el polinomio*

$$x^4 - 2x^2 - 3$$

a) *en factores irreducibles de* $\mathbb{R}[x]$;

b) *en factores irreducibles de* $\mathbb{C}[x]$;

c) *en factores irreducibles de* $\mathbb{Q}[x]$.

Solución

Dado que $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ es una ecuación bicuadrada, tomamos $t = x^2$ y obtenemos una ecuación de segundo grado: $t^2 - 2t - 3 = 0$. Las raíces de $t^2 - 2t - 3$ son 3 y -1, luego

$$(t^2 - 2t - 3) = (t - 3)(t + 1),$$

por tanto

$$x^4 - 2x^2 - 3 = (x^2 - 3)(x^2 + 1).$$

Estudiemos ahora la descomposición en los distintos casos:

a) En $\mathbb{R}[x]$: el polinomio $x^2 - 3$ tiene dos raíces reales $\pm\sqrt{3}$ luego $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, sin embargo $x^2 + 1$ no tiene raíces reales (si $x^2 + 1 = 0$ entonces $x^2 = -1$ luego $x = \pm i \notin \mathbb{R}$), por tanto $x^2 + 1$ es irreducible. Luego:

$$x^4 - 2x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 1)$$

es la factorización en polinomios irreducibles de $x^4 - 2x^2 - 3$ en $\mathbb{R}[x]$.

b) En $\mathbb{C}[x]$: ahora $x^2 + 1$ no es irreducible, pues tiene por raíces $\pm i$, luego $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$. Luego en este caso la descomposición buscada es:

$$x^4 - 2x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + i)(x - i).$$

c) En $\mathbb{Q}[x]$: como $\pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, el polinomio $x^2 - 3$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}$, luego es irreducible. La descomposición en factores irreducibles es en este caso:

$$x^4 - 2x^2 - 3 = (x^2 - 3)(x^2 + 1).$$

14.13. *Descomponer el polinomio*

$$2x^4 - 3x^2 - 5$$

en factores irreducibles en:

a) $\mathbb{C}[x]$, *b)* $\mathbb{R}[x]$, *c)* $\mathbb{Q}[x]$, *d)* $\mathbb{Z}/(7)[x]$.

Solución

Como en los problemas precedentes, dado que

$$2x^4 - 3x^2 - 5 = 0$$

es una ecuación bicuadrada, se obtiene:

$$2x^4 - 3x^2 - 5 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}\right)(x^2 + 1).$$

a) en $\mathbb{C}[x]$, como $x^2 - \frac{5}{2}$ y $x^2 + 1$ tienen raíces en $\mathbb{C}$, se des componen a su vez en factores irreducibles, obteniendo as

$$2x^4 - 3x^2 - 5 = 2(x - \sqrt{5/2})(x + \sqrt{5/2})(x + i)(x - i)$$

b) en $\mathbb{R}[x]$, como $\pm i \notin \mathbb{R}$ se tiene que $x^2 + 1$ es irreducible e $\mathbb{R}[x]$, luego

$$2x^4 - 3x^2 - 5 = 2(x - \sqrt{5/2})(x + \sqrt{5/2})(x^2 + 1)$$

c) en $\mathbb{Q}[x]$, como $\pm i \notin \mathbb{Q}$ y $\pm\sqrt{5/2} \notin \mathbb{Q}$ tenemos:

$$2x^4 - 3x^2 - 5 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}\right)(x^2 + 1).$$

d) en $\mathbb{Z}/(7)[x]$, en $\mathbb{Z}/(7)$ se verifica:

$$\left(\frac{\bar{5}}{\bar{2}}\right) = \bar{5}(\bar{2})^{-1} = \bar{5} \cdot \bar{4} = \bar{6} = -\bar{1}.$$

Con lo cual:

$$\bar{2}x^4 - \bar{3}x^2 - \bar{5} = \bar{2}(x^2 - (-\bar{1}))(x^2 + \bar{1}) = \bar{2}(x^2 + \bar{1})^2.$$

Por otra parte, $x^2 + \bar{1}$ es irreducible en $\mathbb{Z}/(7)[x]$ pues no tiene raíces en $\mathbb{Z}/(7)$ (se comprueba como en el apartado *c*) del problema 14.10).

14.14. *Estudiar si son primos entre sí los polinomios*

$$A = (x - 3)(x^2 - 2x + 2) \quad ; \quad B = (x + 1)^2$$

a) *En* $\mathbb{C}[x]$.

b) *En* $\mathbb{R}[x]$.

c) *En* $\mathbb{Z}/(5)[x]$.

Solución

a) En $\mathbb{C}[x]$ los polinomios dados se descomponen del siguiente modo:

$$A = (x-3)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$$
$$B = (x + 1)^2$$

Como no tienen factores irreducibles comunes A y B son primos entre sí.

b) En $\mathbb{R}[x]$ son también primos entre sí, pues las factorizaciones son:

$$A = (x - 3)(x^2 - 2x + 2)$$
$$B = (x + 1)^2$$

c) En $\mathbb{Z}/(5)[x]$, hemos de estudiar si $x^2 - 2x + 2$ factoriza:

$$(x + a)(x + b) = x^2 - 2x + 2 \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} a + b = -2 \\ ab = 2 \end{array}\right\}$$

El sistema anterior tiene por solución en $\mathbb{Z}/(5)$:

$$a = 2 \quad \text{y} \quad b = 1.$$

Así:

$$A = (x - 3)(x + 2)(x + 1) \quad \text{y} \quad B = (x + 1)^2.$$

Luego A y B no son primos entre sí, m.c.d. $(A, B) = (x + 1)$.

14.15. *Sean $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ números enteros. Probar que si un número racional $\frac{p}{q}$ (donde p y q son enteros primos entre sí) es raíz del polinomio:*

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

Solución

Si $\frac{p}{q}$ es raíz de P entonces

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0;$$

multiplicando por q^n obtenemos:

$$a_0q^n + a_1q^{n-1}p + a_2q^{n-2}p^2 + \cdots + a_np^n = 0 \quad \text{(I)};$$
$$a_0q^n = (-a_1q^{n-1} - a_2q^{n-2}p - \cdots - a_np^{n-1})p,$$

como

$$-a_1q^{n-1} - a_2q^{n-2}p - \cdots - a_np^{n-1} \in \mathbb{Z}$$

p divide a a_0q^n y como p y q son primos entre sí p divide a a_0. Por otra parte de (I):

$$a_np^n = (-a_0q^{n-1} - a_1q^{n-2}p - a_2q^{n-3}p^2 - \cdots - a_{n-1}p^{n-1})q,$$

como

$$-a_0q^{n-1} - a_1q^{n-2}p - a_2q^{n-3}p^2 - \cdots - a_{n-1}p^{n-1} \in \mathbb{Z},$$

q divide a a_np^n y como p y q son primos entre sí, q divide a a_n.

14.16. *Hallar las raíces en* $\mathbb{R}$ *del polinomio:*

$$4x^3 + 8x^2 + x - 3.$$

Solución

Por el problema anterior las posibles raíces racionales son:

$$\pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm\frac{1}{2} \quad ; \quad \pm\frac{3}{2}, \quad \pm\frac{1}{4}, \quad \pm\frac{3}{4}.$$

Sustituyendo se observa que -1 es raíz:

$$4(-1)^3 + 8(-1)^2 + (-1) - 3 = 0.$$

Así podemos dividir $4x^3 + 8x^2 + x - 3$ por $x + 1$:

$$
\begin{array}{rr|l}
4x^3 + 8x^2 + & x - 3 & x + 1 \\
\cline{3-3}
-4x^3 - 4x^2 & & 4x^2 + 4x - 3 \\
\hline
4x^2 + & x - 3 & \\
-4x^2 - & 4x & \\
\hline
& -3x - 3 & \\
& 3x + 3 & \\
\hline
& 0 &
\end{array}
$$

Tenemos por tanto:

$$4x^3 + 8x^2 + x - 3 = (x + 1)(4x^2 + 4x - 3).$$

Luego las raíces de $4x^2 + 4x + 3$ son también raíces de $4x^3 + 8x^2 + x - 3$.

Como $4x^2 + 4x - 3$ es de segundo grado, sus raíces se calculan fácilmente, resultando: $\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{2}$.

Como $4x^3 + 8x^2 + x - 3$ tiene grado 3, a lo más tiene 3 raíces en $\mathbb{R}$. Luego las raíces de $4x^3 + 8x^2 + x - 3$ en $\mathbb{R}$ son $-1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.

14.17. *Hallar las raíces del polinomio $F = x^2 + x + 1$ en:*

a) $\mathbb{Z}/(5)$.

b) $\mathbb{Z}/(7)$.

Solución

Como $\mathbb{Z}/(5)$ y $\mathbb{Z}/(7)$ son finitos basta con calcular $F^*(r)$, para todo $r \in \mathbb{Z}/(m)$ ($m = 5$ ó 7), donde F^* es la función polinómica determinada por $x^2 + x + 1$:

a) En $\mathbb{Z}/(5)$:

$$F^*(\bar{0}) = \bar{0}^2 + \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}$$
$$F^*(\bar{1}) = \bar{1}^2 + \bar{1} + \bar{1} = \bar{3} \neq \bar{0}$$
$$F^*(\bar{2}) = \bar{2}^2 + \bar{2} + \bar{1} = \bar{2} \neq \bar{0}$$
$$F^*(\bar{3}) = \bar{3}^2 + \bar{3} + \bar{1} = \bar{3} \neq \bar{0}$$
$$F^*(\bar{4}) = \bar{4}^2 + \bar{4} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}$$

Por tanto $x^2 + x + 1$ no tiene raíces en $\mathbb{Z}/(5)$.

b) En $\mathbb{Z}/(7)$:

$$F(\bar{0}) \neq \bar{0}, \quad F(\bar{1}) \neq \bar{0}, \quad F(\bar{2}) = 0$$

luego $\bar{2}$ es raíz,

$$F(\bar{3}) \neq \bar{0}, \quad F(\bar{4}) = \bar{0}$$

por tanto $\bar{4}$ también es raíz,

$$F(\bar{5}) \neq \bar{0}, \quad F(\bar{6}) \neq 0.$$

Las raíces de $x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}/(7)$ son $\bar{2}$ y $\bar{4}$.

14.18. *El producto de las raíces del polinomio*

$$2x^3 - x^2 - 7x + m$$

es igual a 1. *¿Cuánto vale* m?

Solución

Recuérdese que si r_1, r_2 y r_3 son las raíces en $\mathbb{C}$ del polinomio

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

se verifica:

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 &= \frac{a_1}{a_3} \\ r_1r_2r_3 &= -\frac{a_0}{a_3} \end{aligned}\right\} \quad \text{Fórmulas de Cardano.}$$

En nuestro caso $1 = r_1r_2r_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} = -\dfrac{m}{2}$, luego $m = -2$.

14.19. *Hallar las raíces en $\mathbb{C}$ del polinomio:*

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1$$

sabiendo que una de ellas es igual a la suma de las otras dos.

Solución

Sean r_1, r_2 y $r_1 + r_2$ las tres raíces, entonces, aplicando las fórmulas de Cardano:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_1 + r_2 = \dfrac{12}{36} \\ r_1r_2 + r_1(r_1 + r_2) + r_2(r_1 + r_2) = -\dfrac{5}{36} \\ r_1r_2(r_1 + r_2) = -\dfrac{1}{36} \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene:

$$2(r_1 + r_2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

mientras que de la última obtenemos:

$$r_1 r_2 \frac{1}{6} = -\frac{1}{36} \quad ; \quad \text{luego } r_1 r_2 = -\frac{1}{6},$$

de donde:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{1}{6} \\ r_1 r_2 = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Despejando de la primera ecuación r_1 y sustituyendo en la segunda se obtiene:

$$r_1\left(\frac{1}{6} - r_1\right) = -\frac{1}{6},$$

luego

$$r_1^2 - \frac{1}{6} r_1 - \frac{1}{6} = 0.$$

Resolviendo tenemos $r_1 = \frac{1}{2}$ ó $-\frac{1}{3}$. Tomando $r_1 = \frac{1}{2}$, como $r_1 + r_2 = \frac{1}{6}$ se tiene $r_2 = -\frac{1}{3}$ y $r_1 + r_2 = \frac{1}{6}$. Las tres raíces pedidas son $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$. Tomando $r_1 = -\frac{1}{3}$ se obtiene la misma terna de raíces.

14.20. *Estudiar si los polinomios:*

$$A = x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 6 \quad y \quad B = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$$

tienen alguna raíz común.

Solución

Las raíces comunes serán las raíces del polinomio m.c.d. (A, B).

Al dividir A por B se obtiene x como cociente y como resto $2x^2 - 6$. Luego:

$$\text{m.c.d.}\,(A, B) = \text{m.c.d.}\,(x^3 - 2x^2 - 3x + 6, 2x^2 - 6) = \\ = \text{m.c.d.}\,(x^3 - 2x^2 - 3x + 6, x^2 - 3).$$

Al dividir $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$ por $x^2 - 3$ se obtiene $x - 2$ como cociente y 0 como resto, por tanto:

$$\text{m.c.d.}\,(A, B) = x^2 - 3.$$

Las raíces comunes de A y B son $+\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$ pues son las raíces de $x^2 - 3 = \text{m.c.d.}\,(A, B)$.

14.21. *Sea p un entero primo positivo. Probar que cualquier aplicación de $\mathbb{Z}/(p)$ en $\mathbb{Z}/(p)$ se expresa como una función polinómica. (p primo).*

Solución

Sea $\psi : \mathbb{Z}/(p) \to \mathbb{Z}/(p)$ una aplicación cualquiera. Construimos $P \in \mathbb{Z}/(p)[x]$ del siguiente modo:

$$P = \sum_{r \in \mathbb{Z}/(p)} \psi'(r)x(x-1)\cdots(x-r+1)(x-r-1)\cdots(x-p+1).$$

Donde $\psi' : \mathbb{Z}/(p) \to \mathbb{Z}/(p)$ es la aplicación dada por:

$$\psi'(t) = \frac{\psi(t)}{t(t-1)\cdots(t-t+1)(t-t-1)\cdots(t-p+1)}.$$

Vamos a comprobar que la función polinómica:

$$P^* : \mathbb{Z}/(p) \to \mathbb{Z}/(p)$$

coincide con ψ:

Sea t un elemento cualquiera de $\mathbb{Z}/(p)$,

$$P^*(t) = \sum_{r \in \mathbb{Z}/(p)} \psi'(r)t(t-1)\cdots(t-r+1)(t-r-1)\cdots(t-p+1),$$

todos los sumandos del segundo miembro de la igualdad anterior son cero salvo el correspondiente a $t = r$, pues contienen el factor $(t - t)$. Por tanto:

$$P^*(t) = \psi'(t)t(t-1)\cdots(t-t+1)(t-t-1)\cdots(t-p+1) = \psi(t).$$

15. FRACCIONES RACIONALES

15.1. *Sea $K[X, Y]$ el conjunto de polinomios con coeficientes en el cuerpo K y con dos variables X e Y. Dotar a $K[X, Y]$ de estructura de anillo. Construir el cuerpo de fracciones de $K[X, Y]$.*

Solución

En $K[X, Y]$ se definen las operaciones:

$$\sum_{i,j} a_{ij}X^iY^j + \sum_{i,j} b_{ij}X^iY^j = \sum_{ij} (a_{ij} + b_{ij})X^iY^j$$

$$\sum_{ij} a_{ij}X^iY^j \sum b_{ij}X^iY^j = \sum_{ij} c_{ij}X^iY^j,$$

siendo

$$c_{ij} = \sum_{\substack{r+k=i \\ s+l=j}} a_{rs}b_{kl}$$

Con las operaciones anteriores es posible demostrar que $K[X, Y]$ tiene estructura de dominio de integridad.

En el conjunto $K[X, Y] \times (K[X, Y] - \{0\})$ se define la relación de equivalencia:

$$(A, B)\mathscr{R}(C, D) \quad \text{si y sólo si} \quad AD = BC.$$

Escribimos $\frac{A}{B}$ para designar la clase de equivalencia de la que (A, B) es un representante. El conjunto cociente $K[X, Y] \times \times (K[X, Y] - \{0\})/\mathscr{R}$ con las operaciones:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \quad ; \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

es el cuerpo de fracciones de $K[X, Y]$.

15.2. *Simplificar la fracción:*

$$\frac{7x^4 + x^2 + x}{7x^5 + x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1}$$

Solución

El máximo común divisor de

$$A = 7x^4 + x^2 + x \quad \text{y} \quad B = 7x^5 + x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$$

es $D = 7x^3 + x^2 + 1$. Como $\frac{A}{D} = x$ y $\frac{B}{D} = x^2 + 1$, la forma simplificada de la fracción dada es:

$$\frac{x}{x^2 + 1}.$$

15.3. *Simplificar la fracción de* $\mathbb{C}(x)$*:*

$$\frac{x^4 + 2ix^3 + ix}{ix^4 - x^3 + ix^2}.$$

Solución

El máximo común divisor de

$$A = x^4 + 2ix^3 + ix \quad \text{y} \quad B = ix^4 - x^3 + ix^2$$

es $D = x^3 + ix^2 + x$ (sugerimos para conseguir el máximo común divisor dividir B entre A), además $\frac{A}{D} = x + i$; $\frac{B}{D} = ix$. La fracción simplificada es

$$\frac{x+i}{ix}.$$

15.4. *Obtener una fracción racional reducida* $\frac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$, *tal que:*

$$\frac{A}{B}(x^2 - 1) + \frac{x^2+1}{x^3+1} = 2.$$

Solución

Si $\frac{A}{B}(x^2 - 1) + \frac{x^2+1}{x^3+1} = 2$, entonces:

$$\frac{A}{B}(x^2 - 1) = 2 - \frac{x^2+1}{x^3+1} = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3+1}.$$

Por tanto, $\frac{A}{B} = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{(x^2-1)(x^3+1)}$, como

$$\text{m.c.d.}\,(2x^3 - x^2 + 1, (x^2 - 1)(x^3 + 1)) = 1,$$

la fracción pedida es:

$$\frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^5 - x^3 + x^2 - 1}.$$

15.5. *Resolver el siguiente sistema en* $\mathbb{R}(x)$:

$$\left.\begin{aligned} (x^3 - x^2 + x - 1)P + (x^3 - 2)Q = 0 \\ x^7 P + \frac{1}{x^2 + 1} Q = x \end{aligned}\right\} .$$

Solución

De la primera ecuación se obtiene:

$$P = -\frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2 + x - 1} Q$$

Sustituyendo en la segunda:

$$-\frac{x^{10} - 2x^7}{x^3 - x^2 + x - 1} Q + \frac{1}{x^2 + 1} Q = x;$$

como m.c.d. $(x^3 - x^2 + x - 1, x^2 + 1) = x^2 + 1$,

el m.c.m. $(x^3 - x^2 + x - 1, x^2 + 1) = x^3 - x^2 + x - 1$, entonces:

$$Q = \frac{(x^3 - x^2 + x - 1)x}{-x^{10} + 2x^7 + x - 1} = \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x}{-x^{10} + 2x^7 + x - 1}.$$

Luego

$$P = -\frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2 + x - 1} \cdot \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x}{-x^{10} + 2x^7 + x - 1} =$$

$$= -\frac{(x^3 - 2)x}{-x^{10} + 2x^7 + x - 1} = \frac{x^4 - 2x}{x^{10} - 2x^7 - x + 1}.$$

15.6. *Hallar la parte entera de la fracción:*

$$\frac{5x^4 - 5x^2 + x}{x^2 - 1}.$$

Solución

Dividiendo $5x^4 - 5x^2 + x$ por $x^2 - 1$ se obtiene

$$\begin{array}{rr|l} 5x^4 & -5x^2 + x & x^2 - 1 \\ \cline{3-3} -5x^4 & +5x^2 & 5x^2 \\ \hline & x & \end{array}$$

Luego $\dfrac{5x^4 - 5x^2 + x}{x^2 - 1} = 5x^2 + \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Por tanto, la parte entera de $\dfrac{5x^4 - 5x^2 + x}{x^2 - 1}$ es $5x^2$.

15.7. *Descomponer en* $\mathbb{R}(x)$ *las siguientes fracciones:*

a) $\dfrac{1}{(x - 2)(x - 5)}$

b) $\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$

c) $\dfrac{2x^3+3x^2-2x+2}{2x^2+5x+3}$.

Solución

a) $$\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-5)}$$

Luego, $$\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{a(x-5)+b(x-2)}{(x-2)(x-5)},$$

$$1 = ax - 5a + bx - 2b = (a+b)x - 5a - 2b.$$

Por tanto, $a+b=0$ y $-5a-2b=1$, entonces $a=-\dfrac{1}{3}$ y $b=\dfrac{1}{3}$:

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)} = -\frac{1}{3(x-2)} + \frac{1}{3(x-5)}$$

b)

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x-4};$$

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)(x-4)} =$$

$$= \frac{a(x-3)(x-4)+b(x-2)(x-4)+c(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$x^2+1 = (a+b+c)x^2 + (-7a-6b-5c)x + 12a + 8b + 6c.$$

Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=1 \\ -7a-6b-5c=0 \\ 12a+8b+6c=1 \end{array}\right\}$$

luego, $a=\frac{5}{2}$, $b=-10$, $c=\frac{17}{2}$:

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{5}{2(x-2)}-\frac{10}{x-3}+\frac{17}{2(x-4)}$$

c) $\dfrac{2x^3+3x^2-2x+2}{2x^2+5x+3}$; como el grado del numerador es mayor que el del denominador, dividimos.

Entonces $\dfrac{2x^3+3x^2-2x-2}{2x^2+5x+3}=x-1+\dfrac{1}{2x^2+5x+3}$.

Ahora hay que descomponer la fracción:

$$\frac{1}{2x^2+5x+3}.$$

$$\frac{1}{2x^2+5x+3}=\frac{1/2}{x^2+5/2x+3/2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+3/2},$$

$$\frac{1/2}{x^2+5/2x+3/2}=\frac{(a+b)x+3/2a+b}{x^2+5/2x+3/2},$$

luego:

$$\frac{1}{2}=(a+b)x+\frac{3}{2}a+b,$$

por tanto:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 0 \\ \frac{3}{2}a + b &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

luego $a = 1$, $b = -1$ y así

$$\frac{1}{2x^2 + 5x + 3} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x + 3/2},$$

con lo cual:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 5x + 3} = x - 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3/2}.$$

15.8. *Descomponer en* $\mathbb{R}(x)$ *las fracciones:*

a) $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x-3)}$

b) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$

Solución

a)

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-3}$$

Por tanto $x^2 = (ax+b)(x-3) + c(x^2+1)$, de donde

$$\left.\begin{aligned} a \qquad + c &= 1 \\ -3a + b \qquad &= 0 \\ -3b + c &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Entonces $a = \frac{1}{10}$; $b = \frac{3}{10}$; $c = \frac{9}{10}$:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}}{x^2+1} + \frac{\frac{9}{10}}{x-3}$$

b)

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{a'x+b'}{x^2+x+1}$$

Por tanto,

$$\left.\begin{aligned} a + a' &= 0 \\ a + b + b' &= 0 \\ a + b + a' &= 0 \\ b + b' &= 1 \end{aligned}\right\}$$

con lo cual $a = -1$, $b = 0$, $a' = 1$, $b' = 1$:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{-x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

15.9. *Descomponer en* $\mathbb{R}(x)$ las fracciones:

a) $\dfrac{x}{(x-5)^2(x+1)}$

b) $\dfrac{3x^2-13x+14}{(x-3)^2(x-1)}$

c) $\dfrac{x^3+x+4}{(x^2+1)^2}$.

Solución

a)

$$\frac{x}{(x-5)^2(x+1)}=\frac{a}{x-5}+\frac{b}{(x-5)^2}+\frac{c}{x+1}$$

luego $a=\frac{1}{36},\quad b=\frac{5}{6},\quad c=-\frac{1}{36}$:

$$\frac{x}{(x-5)^2(x+1)}=\frac{1}{36(x-5)}+\frac{5}{6(x-5)^2}-\frac{1}{36(x+1)}.$$

b)

$$\frac{3x^2-13x+14}{(x-3)^2(x-1)}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-1}$$

c)

$$\frac{x^3+x+4}{(x^2+1)^2}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{a'x+b'}{(x^2+1)^2};$$

de donde:

$$\frac{x^3+x+4}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{x^2+1}+\frac{4}{(x^2+1)^2}.$$

15.10. *Descomponer en* $\mathbb{R}(x)$ *la fracción:*

$$\frac{x^4-x^3+2x+9}{(x-2)^2(x^2+x+1)(x+1)}$$

Solución

$$\frac{x^4-x^3+2x+9}{(x-2)^2(x^2+x+1)(x+1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}+\frac{e}{x+1},$$

de donde $a=0,\quad b=1,\quad c=0,\quad d=1,\quad e=1.$

Por tanto

$$\frac{x^4 - x^3 + 2x + 9}{(x-2)^2(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x+1}.$$

15.11. *Descomponer en* $\mathbb{R}(x)$ *las fracciones:*

a) $\dfrac{1}{x^4 - 9}$

b) $\dfrac{4x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 1}{(x^4 - 1)(x - 2)^2}$

c) $\dfrac{3}{x^3 + 1}$

d) $\dfrac{x}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$

e) $\dfrac{x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 5x + 6}{x^5 - 5x^3 + 6x}$.

Solución

a) $\dfrac{1}{x^4 - 9} = \dfrac{a}{x + \sqrt{3}} + \dfrac{b}{x - \sqrt{3}} + \dfrac{cx + d}{x^2 + 3}$

De donde $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{36}$; $b = \dfrac{\sqrt{3}}{36}$; $c = 0$; $d = -\dfrac{1}{6}$

Luego $\dfrac{1}{x^4 - 9} = -\dfrac{\sqrt{3}}{36(x + \sqrt{3})} + \dfrac{\sqrt{3}}{36(x - \sqrt{3})} - \dfrac{1}{6(x^2 + 3)}$

b) $\dfrac{4x^5-15x^4+16x^3-1}{(x^4-1)(x-2)^2}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{(x-2)^2}$

c) $\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-x+2}{x^2-x+1}$

d) $\dfrac{x^4-2x+1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

e) $\dfrac{x^4+2x^3-5x^2-5x+6}{x^5-5x^3+6x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{3}}{6(x+\sqrt{3})}+$

$$+\frac{\sqrt{3}}{6(x-\sqrt{3})}-\frac{\sqrt{2}}{4(x+\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{2}}{4(x-\sqrt{2})}.$$

15.12. *Descomponer en $\mathbb{C}(x)$ y en $\mathbb{R}(x)$ las fracciones:*

a) $\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$

b) $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x}.$

Solución

a) $\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}=\dfrac{1}{x-1+i}+\dfrac{1}{x-1-i}$ en $\mathbb{C}(x)$.

En $\mathbb{R}(x)$ $\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$ no puede reducirse más.

b) $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$ en $\mathbb{C}(x)$.

En $\mathbb{R}(x)$: $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

15.13. *Descomponer en* $\mathbb{Q}(x)$ *la fracción:*

$$\frac{x^4+2x^3-5x^2-5x+6}{x^5-5x^3+6x}.$$

Solución

La descomposición en factores primos de

$$x^5-5x^3+6x$$

en $\mathbb{Q}[x]$ es la siguiente:

$$x^5-5x^3+6x=x(x^2-3)(x^2-2).$$

Obsérvese que x^2-3 y x^2-2 son primos en $\mathbb{Q}[x]$ pues $\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ y $\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

$$\frac{x^4+2x^3-5x^2-5x+6}{x^5-5x^3+6x}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2-3}+\frac{dx+e}{x^2-2}$$

De donde $a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$ y $e=1$:

$$\frac{x^4+2x^3-5x^2-5x+6}{x^5-5x^3+6x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-3}+\frac{1}{x^2-2}.$$

15.14. *Descomponer en $\mathbb{Q}(x)$ y $\mathbb{Z}/(7)(x)$ la fracción:*

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 1}.$$

Solución

En $\mathbb{Q}(x)$ $\dfrac{1}{x^2 - 6x + 1}$ no se puede descomponer más, pues $x^2 - 6x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Obsérvese que las raices de $x^2 - 6x + 1 = 0$ son irracionales.

En $\mathbb{Z}/(7)(x)$, como $x^2 - 6x + 1 = (x - 2)(x - 4)$ entonces

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 1} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x - 4},$$

luego

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -4a - 2b &= 1 \end{aligned}\right\}$$

de donde $a = 3$ y $b = 4$. Entonces

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 1} = \frac{3}{x - 2} + \frac{4}{x - 4} \quad \text{en} \quad \mathbb{Z}/(7)(x).$$

15.15. *Hallar m para que la fracción*

$$\frac{mx^2 + 2}{(x - 1)^2 x}$$

se descomponga en $\mathbb{R}(x)$ en una suma de la forma: $\dfrac{A}{(x - 1)^2} + \dfrac{B}{x}$.

Solución

$$\frac{mx^2 + 2}{(x-1)^2 x} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \quad a + \qquad\quad c \\ 0 = -a + b - 2c \\ 2 = \qquad\qquad\quad\; c \end{array}\right\},$$

deseamos que $a = 0$, luego $m = 2$.

15.16. *Sea n un número natural distinto de cero. Si A y B son dos polinomios cuyos términos son todos de grados múltiplos de n en* $K[x]$ *y*

$$\frac{A}{B} = E + \frac{A_{11}}{B_1} + \frac{A_{12}}{B_1^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{B_1^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{B_r} +$$

$$+ \frac{A_{r_2}}{B_r^2} + \cdots + \frac{A_{rm_r}}{B_r^{m_r}},$$

donde los B_i *tienen todos los términos de grados múltiplos de n. Probar que E y los* A_{ij} *tienen todos los términos de grados múltiplos de n.*

Solución

Llamando $T = X^n$ y sustituyendo en cada polinomio P con la propiedad de que todos los términos tienen grados múltiplos de n, se obtiene un polinomio, P', en $K[T]$.

Aplicando el proceso de sustitución anterior a A, B y $B_1, B_2, \ldots, B_r$

obtenemos los polinomios A', B' y $B'_1, B'_2, \ldots, B'_r$. Descomponiendo A', B' en $K(T)$ tenemos:

$$\frac{A'}{B'} = E' + \frac{A'_{11}}{B'_1} + \frac{A'_{12}}{B_1'^2} + \cdots + \frac{A'_{rm_r}}{B_r'^{m_r}}$$

Donde E' y los A'_{ij} pertenecen a $K[T]$. Sustituyendo T por X^n se obtiene la descomposición de $\frac{A}{B}$ en $K[X]$, y por unicidad de la descomposición A_{ij} coincide con el polinomio obtenido de A'_{ij} al sustituir T por X^n y así mismo E «proviene» de E'. Por tanto, E y los A_{ij} tienen todos los términos de grados múltiplos de n.

15.17. *Probar que toda fracción* $\frac{A}{B} \in K(x)$ *se puede expresar de la forma*:

$$\frac{A}{B} = H_1 + \cfrac{1}{H_2 + \cfrac{1}{H_3 + \cdots + \cfrac{1}{H_r}}}$$

Donde $H_1, \ldots, H_r \in K[x]$.

Solución

Sea $\frac{A}{B} \in K(x)$. Procederemos por inducción sobre el grado de B:

Si el grado de B es cero, entonces $B = b \in K$.

Si $A = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, basta tomar $\frac{A}{B} = H$, donde

$$H = \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b} x + \cdots + \frac{a_n}{b} x^n.$$

Supongamos ahora que grado de $B = g$ y que para toda fracción $\frac{A'}{B'}$ con grado de $B' < g$ se tiene

$$\frac{A'}{B'} = H'_1 + \cfrac{1}{H'_2 + \cdots + \cfrac{1}{H'_e}} \quad \text{donde } H_1, \ldots, H_e \in K[x].$$

Por el teorema de división:

$$\frac{A}{B} = H_1 + \frac{A'}{B'},$$

donde $H_1, A' \in K[x]$ y grado de $A' <$ grado de $B = g$.

También podemos escribir:

$$\frac{A}{B} = H_1 + \cfrac{1}{\cfrac{B}{A'}}.$$

Y por hipótesis de inducción, como grado de $A' < g$,

$$\frac{B}{A'} = H_2 + \cfrac{1}{H_3 + \cdots + \cfrac{1}{H_r}}$$

donde $H_2, \ldots, H_r \in K[x]$.

Por tanto:

$$\frac{A}{B} = H_1 + \cfrac{1}{H_2 + \cfrac{1}{H_3 + \cdots + \cfrac{1}{H_r}}}.$$

16. LIMITES

16.1. *Calcular* $\lim_{x \to a} \dfrac{5x^6 + 1}{7x^6 + 5x^4 + 1}$ *si* $a = 0$ *y* $a = \infty$.

Solución

En $a = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^6 + 1}{7x^6 + 5x^4 + 1} = \frac{5 \cdot 0 + 1}{7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 1} = 1$$

En $a = \infty$

Si sustituimos x por ∞ en la expresión, resulta la indetermina-ción $\dfrac{\infty}{\infty}$, que resolvemos dividiendo numerador y denominador por x^6

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^6 + 1}{7x^6 + 5x^4 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{5x^6}{x^6} + \dfrac{1}{x^6}}{\dfrac{7x^6}{x^6} + \dfrac{5x^4}{x^6} + \dfrac{1}{x^6}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5 + \dfrac{1}{x^6}}{7 + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^6}} = \frac{5}{7}.$$

16.2. *Calcular*

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{5}{x^3 - 1} \right).$$

Solución

Si sustituimos x por 1 en la expresión, resulta la indeterminación $\infty - \infty$, que resolvemos de la siguiente forma:

Para $x \neq 1$ se tiene

$$\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{5}{x^3 - 1} = \frac{(x^3 - 1) - 5(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x^3 - 1)} =$$

$$= \frac{(x - 1)(x^2 - 4x - 4)}{(x - 1)(x + 1)(x^3 - 1)} = \frac{x^2 - 4x - 4}{x^4 + x^3 - x - 1}.$$

Entonces

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{5}{x^3 - 1} \right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 4x - 4}{x^4 + x^3 - x - 1} = \frac{-7}{0} = -\infty$$

16.3. *Calcular*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}.$$

Solución

Si sustituimos x por 0 en la expresión, resulta la indeterminación $\frac{0}{0}$, que resolvemos multiplicando numerador y denominador por $(\sqrt{1 + x} + 1)$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$$

16.4. *Calcular*

$$\lim_{x\to 9} \frac{2-\sqrt{x-5}}{x^2-81}.$$

Solución

Sustituyendo x por 9, nos resulta la indeterminación $\frac{0}{0}$, pero par
$x \neq 9$, se tiene

$$\frac{2-\sqrt{x-5}}{x^2-81} = \frac{(2-\sqrt{x-5})(2+\sqrt{x-5})}{(x^2-81)(2+\sqrt{x-5})} =$$

$$= \frac{4-(x-5)}{(x-9)(x+9)(2+\sqrt{x-5})} =$$

$$= \frac{9-x}{(x-9)(x+9)(2+\sqrt{x-5})} = \frac{-1}{(x+9)(2+\sqrt{x-5})}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 9}\frac{2-\sqrt{x-5}}{x^2-81}=\lim_{x\to 9}\frac{-1}{(x+9)(2+\sqrt{x-5})}=$$

$$=\frac{-1}{18\cdot 4}=-\frac{1}{72}.$$

16.5. *Calcular*

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right).$$

Solución

Si sustituimos x por 1 en la expresión, resulta la indeterminación $\infty-\infty$, que resolvemos de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(1-\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(1-\sqrt{x+1}\right).$$

Ahora bien

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

y

$$\lim_{x\to 1^+}(1-\sqrt{x+1})=1-\sqrt{2}$$

por tanto

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=(+\infty)(1-\sqrt{2})=-\infty.$$

16.6. *Calcular*

$$\lim_{x\to\infty} x^2(\sqrt{x^3+1}-x^2).$$

Solución

Si sustituimos x por ∞, en la expresión, resulta la indeterminación $\infty-\infty$, que resolvemos de la siguiente forma:

$$x^2(\sqrt{x^3+1}-x^2)=\frac{x^2(\sqrt{x^3+1}-x^2)(\sqrt{x^3+1}+x^2)}{\sqrt{x^3+1}+x^2}=$$

$$=\frac{x^2[(x^3+1)-x^4]}{\sqrt{x^3+1}+x^2}=\frac{-x^6+x^5+x^2}{\sqrt{x^3+1}+x^2}.$$

Pero resulta que si sustituimos en esta última expresión x por ∞, resulta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, que resolvemos dividiendo por x^6 el numerador y denominador, de donde

$$\frac{-x^6+x^5+x^2}{\sqrt{x^3+1}+x^2}=\frac{-\frac{x^6}{x^6}+\frac{x^5}{x^6}+\frac{x^2}{x^6}}{\sqrt{\frac{x^3}{x^{12}}+\frac{1}{x^{12}}}+\frac{x^2}{x^6}}=\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}{\sqrt{\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{12}}}+\frac{1}{x^4}}.$$

Por tanto

$$\lim_{x\to\infty} x^2(\sqrt{x^3+1}-x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^4}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{x^{12}}}+\dfrac{1}{x^4}}=-\frac{1}{0}=-\infty.$$

16.7. *Calcular*

$$\lim_{x\to 81}\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}.$$

Solución

Hagamos el cambio de variable $y=+\sqrt[4]{x}$, donde si x tiende a 81 entonces y tenderá a 3, resultando

$$\lim_{x\to 81}\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}=\lim_{y\to 3}\frac{y^2-9}{y-3}.$$

Aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$ que resolvemos de la siguiente forma:

$$\frac{y^2-9}{y-3}=\frac{(y-3)(y+3)}{y-3}=y+3$$

luego

$$\lim_{y\to 3}\frac{y^2-9}{y-3}=\lim_{y\to 3} y+3=3+3=6.$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 81} \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3} = 6.$$

16.8. *Calcular*

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}.$$

Solución

Aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$ que resolvemos de la siguiente forma: si $x \neq 3$ se tiene que

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6})(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$

$$= \frac{(x^2-2x+6)-(x^2+2x-6)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$

$$= \frac{-4x+12}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$

$$= \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$

$$= \frac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \frac{-4}{2(3+3)} = -\frac{1}{3}.$$

16.9. *Calcular*

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt[3]{y^2+1}-1}.$$

Solución

Hacemos el cambio $x = +\sqrt[6]{y^2+1}$, luego si y tiende a 0, entonces x tiende a 1, resultando

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt[3]{y^2+1}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}.$$

Aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$, que resolvemos de la siguiente forma:

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Por tanto

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt[3]{y^2+1}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

16.10. *Calcular*

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x^2 - 2\pi x + \pi^2}{x - \pi}.$$

Solución

Si hacemos tender x a π (obsérvese que en $x = \pi$ la función no está definida, lo que no es obstáculo para el cálculo del límite) nos resulta la indeterminación $\frac{0}{0}$, que resolvemos dividiendo el numerador y el denominador por $x - \pi$, resultando

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x^2 - 2\pi x + \pi^2}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{(x - \pi)(x - \pi)}{x - \pi} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} x - \pi = 0.$$

16.11. *Calcular*

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt[3]{x^2 + 3} - \sqrt[3]{x^2}).$$

Solución

Aparece la indeterminación $\infty - \infty$, que resolvemos de la siguiente forma:

Utilizando la identidad

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

de donde

$$(a - b) = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

y tomando $a = \sqrt[3]{x^2+3}$ y $b = \sqrt[3]{x^2}$ se tiene que

$$\sqrt[3]{x^2+3} - \sqrt[3]{x^2} = \frac{(\sqrt[3]{x^2+3})^3 - (\sqrt[3]{x^2})^3}{(\sqrt[3]{x^2+3})^2 + \sqrt[3]{x^2+3}\cdot\sqrt[3]{x^2} + (\sqrt[3]{x^2})^2} =$$

$$= \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2} + \sqrt[3]{(x^2+3)\cdot x^2} + \sqrt[3]{x^4}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2} + \sqrt[3]{(x^2+3)\cdot x^2} + \sqrt[3]{x^4}}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2+3} - \sqrt[3]{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2} + \sqrt[3]{(x^2+3)\cdot x^2} + \sqrt[3]{x^4}} =$$

$$= \frac{3}{\infty} = 0.$$

16.12. *Calcular*

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt[4]{x+9} - \sqrt[4]{x-9}).$$

Solución

Aparece la indeterminación $\infty - \infty$ que resolvemos de la siguiente forma:

Utilizando la identidad

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

de donde

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$$

y tomando $a = \sqrt[4]{x+9}$ y $b = \sqrt[4]{x-9}$ se tiene que

$$\sqrt[4]{x+9} - \sqrt[4]{x-9} =$$

$$= \frac{(\sqrt[4]{x+9})^4 - (\sqrt[4]{x-9})^4}{(\sqrt[4]{x+9})^3 + (\sqrt[4]{x+9})^2 \sqrt[4]{x-9} + \sqrt[4]{x+9}(\sqrt[4]{x-9})^2 + (\sqrt[4]{x-9})^3} =$$

$$= \frac{(x+9)-(x-9)}{\sqrt[4]{(x+9)^3} + \sqrt[4]{(x+9)^2(x-9)} + \sqrt[4]{(x+9)(x-9)^2} + \sqrt[4]{(x-9)^3}}.$$

Por tanto

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt[4]{x+9} - \sqrt[4]{x-9}) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{18}{\sqrt[4]{(x+9)^3} + \sqrt[4]{(x+9)^2(x-9)} + \sqrt[4]{(x+9)(x-9)^2} + \sqrt[4]{(x-9)^3}} =$$

$$= \frac{18}{\infty} = 0.$$

16.13. *Calcular*

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x).$$

Solución

Si sustituimos x por $+\infty$ en la expresión, resulta la indeterminación $\infty - \infty$ que resolvemos de la siguiente forma:

$$\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x =$$

$$= \frac{(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x)(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x)}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} =$$

$$= \frac{[(x+\alpha)(x+\beta)] - x^2}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} = \frac{x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta - x^2}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)x + \alpha\beta}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x}.$$

Pero resulta que si sustituimos en esta última expresión x por $+\infty$, nos aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que resolvemos dividiendo por x el numerador y el denominador, de donde

$$\frac{(\alpha + \beta)x + \alpha\beta}{\sqrt{(x + \alpha)(x + \beta)} + x} = \frac{\frac{(\alpha + \beta)x}{x} + \frac{\alpha\beta}{x}}{\sqrt{\frac{(x + \alpha)(x + \beta)}{x^2}} + \frac{x}{x}} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta) + \frac{\alpha\beta}{x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)} + 1}.$$

Por tanto

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{(x + \alpha)(x + \beta)} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha + \beta + \frac{\alpha\beta}{x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)} + 1} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

16.14. *Calcular*

$$\lim_{x \to \infty} x^2\left(\sqrt{\left(1 + \frac{a}{x^2}\right)\left(1 + \frac{b}{x^2}\right)} - 1\right).$$

Solución

Si hiciésemos tender x a $+\infty$ en la expresión resultaría la indeterminación $\infty \cdot 0$, para resolverla operamos:

$$x^2\left(\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}-1\right)=$$

$$=\frac{x^2\left(\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}-1\right)\left(\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}+1\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}+1}=$$

$$=\frac{x^2\left[\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)-1\right]}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}+1}=\frac{x^2\left(1+\frac{b}{x^2}+\frac{a}{x^2}+\frac{ab}{x^4}-1\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}+1}=$$

$$=\frac{x^2\left(\frac{a+b}{x^2}+\frac{ab}{x^4}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}+1}=\frac{a+b+\frac{ab}{x^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}+1}.$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}+1}=\frac{a+b+0}{\sqrt{(1+0)(1+0)}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

16.15. *Sea* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, *siendo* $a_n \neq 0$ *y* f *una función de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$, *entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{P(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n}.$$

Solución

Calculemos el límite de $\dfrac{P(x)}{a_n x^n}$ cuando x tiende a ∞.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{a_n x^n} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x} + \cdots + \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n} =$$

$$= 1 + 0 + \cdots + 0 = 1.$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{P(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{P(x)}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n}.$$

16.16. *Hallar el límite en el infinito* $(+\infty)$ *de la expresión*

$$\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

en función de m *y* n $(a_n \neq 0$ *y* $b_m \neq 0)$.

Solución

Supongamos que $n \geqslant m$, dividiendo por x^n se tiene que

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0}{x^n} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + a_n}{\dfrac{b_0}{x^n} + \dfrac{b_1}{x^{n-1}} + \cdots + \dfrac{b_m x^m}{x^n}}.$$

Como es sabido, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{b_i}{x^{n-i}} = 0$ si $n - i > 0$, entonces

$$\begin{aligned} L &= \infty && \text{si } a_n > 0 \text{ y } n > m \\ L &= -\infty && \text{si } a_n < 0 \text{ y } n > m \\ L &= \frac{a_n}{b_m} && \text{si } n = m. \end{aligned}$$

Sea $m > n$, dividiendo por x^m, se tiene que

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0}{x^m} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^{m-n}}}{\dfrac{b_0}{x^m} + \cdots + b_m} = \frac{0}{b_m} = 0.$$

16.17. *Calcular*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

con $m > 0$, $n > 0$, *enteros.*

Solución

Obviamente resulta la indeterminación $\frac{0}{0}$, que resolvemos de la siguiente forma:

$$\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)} =$$

$$= \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1}.$$

Luego

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} =$$

$$= \frac{1 + 1 + \overset{(m}{\cdots} + 1}{1 + 1 + \overset{(n}{\cdots} + 1} = \frac{m}{n}.$$

16.18. *Comprobar mediante criterios* $(\varepsilon - \delta)$ *que* $\lim_{x \to -1} x^2 - 1 = 0$.

Solución

Veamos que dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x + 1| < \delta$, entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$

$$|f(x)| = |x^2 - 1| = |(x - 1)(x + 1)| = |x - 1||x + 1|.$$

Necesitamos acotar la expresión $|x - 1|$, tomemos por ejemplo $0 < |x + 1| < \delta < 1$, entonces

$$|x| = |x + 1 - 1| \leqslant |x + 1| + |-1| < 1 + 1 = 2.$$

Por tanto,

$$|x^2 - 1| \leqslant (|x| + |-1|)|x + 1| < (2 + 1)\cdot\delta = 3\cdot\delta.$$

Fijándonos en la igualdad $3\delta = \varepsilon$, de donde $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, resulta que tomando $\delta < \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$ se tiene el resultado.

16.19. *Comprobar mediante criterios* $(\varepsilon - \delta)$ *que*

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 21.$$

Solución

Si sustituimos x por 2, resulta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, que resolvemos dividiendo el numerador y el denominador por $(x - 2)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 3x - 2}{(x - 2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(2x^3 + 2x + 1)}{(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} 2x^3 + 2x + 1 = 21.$$

Comprobemos que éste es el límite mediante criterios $(\varepsilon - \delta)$. Dado un $\varepsilon > 0$ tenemos que hallar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|2x^3 + 2x + 1 - 21| < \varepsilon$

$$|2x^3 + 2x + 1 - 21| = |2x^3 + 2x - 20| = |2x^3 - 16 + 2x - 4| \leqslant$$

$$\leqslant |2x^3 - 16| + |2x - 4| = 2|x^3 - 2^3| + 2|x - 2| =$$

$$= 2|(x - 2)(x^2 + 2x + 4)| + 2|x - 2| =$$

$$= 2|x - 2|\,|x^2 + 2x + 4| + 2|x - 2| \leqslant$$

$$\leqslant 2|x - 2|(|x|^2 + 2|x| + 4) + 2|x - 2| =$$

$$= 2|x - 2|(|x|^2 + 2|x| + 4 + 1) = 2|x - 2|(|x|^2 + 2|x| + 5).$$

Como necesitamos acotar la expresión $|x|^2 + 2|x| + 5$ tomemos por ejemplo $0 < |x - 2| < \delta < 1$, entonces

$$|x| = |x - 2 + 2| \leqslant |x - 2| + |2| < \delta + 2 < 3$$

$$\text{luego } |x|^2 + 2|x| + 5 < 3^2 + 2 \cdot 3 + 5 = 20.$$

$$\text{Por tanto } |2x^3 + 2x - 20| < 2|x - 2| \cdot 20 < 40\delta.$$

Fijándonos en la igualdad $40\delta = \varepsilon$, de donde $\delta = \dfrac{\varepsilon}{40}$, resulta que tomando $\delta < \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{40}\right\}$ se tiene el resultado.

16.20. *Probar que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

no tiene límites por la derecha ni por la izquierda en ningún punto.

Solución

Procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$.

Entonces dado $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, existiría $\delta > 0$ tal que si $x > a$ y $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Tomemos el intervalo $\left(a, a + \dfrac{\delta}{2}\right)$, existirán $x_1, x_2 \in \left(a, a + \dfrac{\delta}{2}\right)$ tales que $x_1 \in \mathbb{Q}$ y $x_2 \notin \mathbb{Q}$, por tanto

$$x_1 - a < \frac{\delta}{2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - b| < \frac{1}{2}$$

y

$$x_2 - a < \frac{\delta}{2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_2) - b| < \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } 1 = |1 - 0| &= |f(x_1) - f(x_2)| = \\ &= |f(x_1) - b + b - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - b| + |f(x_2) - b| < \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

es decir $1 < 1$, lo cual es una contradicción.

De la misma manera demostraríamos que $f(x)$ no tiene límite por la izquierda en ningún punto.

16.21. *Dada la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & si \quad x < -1 \\ 0 & si \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & si \quad 1 < x. \end{cases}$$

Hallar el límite por la derecha y por la izquierda en $x = -1$, $x = -\dfrac{1}{2}$ *y* $x = 1$. *Comprobar los resultados mediante la técnica* $(\varepsilon - \delta)$.

Solución

En $x = -1$: La expresión de la función $f(x)$ cuando x se aproxima a -1 por la izquierda es $\dfrac{1}{x+1}$, luego vamos a analizar el límite por la izquierda de la función en $x = -1$, utilizando dicha expresión. Si x se aproxima a -1 por la izquierda, la función $x + 1$ tiende a cero, y es negativa, luego

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty.$$

Comprobémoslo:

Dado un $K \in \mathbb{R}$ tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < -1 - x < \delta$ entonces $f(x) < K$, es decir $\frac{1}{x+1} < K$.

Sea $K < 0$

$$\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{-1-x} < -\frac{1}{\delta} \text{ ya que si } -1-x < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-1-x} > \frac{1}{\delta} \Rightarrow -\frac{1}{-1-x} < -\frac{1}{\delta}.$$

Luego $\frac{1}{x+1} < -\frac{1}{\delta}$.

Fijándonos en la igualdad $-\frac{1}{\delta} = K$, es decir $\delta = -\frac{1}{K}$ se tiene el resultado.

Nótese que $\delta > 0$ ya que $K < 0$.

Si $K \geqslant 0$, tomamos el δ correspondiente a $K_1 = -1$, cumpliéndose que si $0 < -1 - x < \delta$ entonces

$$\frac{1}{x+1} < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{-\dfrac{1}{K_1}} = K_1 < K.$$

La expresión de $f(x)$ cuando x se aproxima a -1 por la derecha es la función 0, es claro pues que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0.$$

Comprobémoslo:

Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - (-1)| < \delta$ entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = 2$, tal que si $0 < x + 1 < 2$ entonces

$$\begin{aligned} 0 < x + 1 &\Rightarrow \quad -1 < x \\ x + 1 < 2 &\Rightarrow \quad x < 1 \end{aligned}$$

es decir $-1 < x < 1$ luego $f(x) = 0$ y

$$|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

En $x = -\dfrac{1}{2}$: En este caso el límite por la derecha y por la izquierda coinciden y vale cero. En efecto:

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{1}{4}$

tal que si

$$\left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|x + \frac{1}{2}\right| < \delta = \frac{1}{4}$$

entonces

$$|x| = \left|x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$$

luego $\quad -1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad$ y

$$|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

En $x = 1$: La expresión de la función $f(x)$ por la derecha de 1 es $\dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$, obsérvese que si $x > 1$ la función $\sqrt{x - 1}$ está bien definida pues $x - 1 > 0$ y tiende a 0, luego el límite lateral buscado es $+\infty$. En efecto, dado un $K \in \mathbb{R}$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < x - 1 < \delta$ entonces $f(x) > K$, es decir

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} > K.$$

Sea $K > 0$, si $0 < x - 1 < \delta$ entonces

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{\delta}}.$$

Fijándonos en la igualdad $\dfrac{1}{\sqrt{\delta}} = K$, es decir $\delta = \dfrac{1}{K^2}$, se tiene el resultado.

Si $K \leqslant 0$, tomamos el δ correspondiente a $K_1 = 1$, cumpliéndose que si $0 < x - 1 < \delta$ entonces

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{K_1^2}}} = K_1 > K.$$

La expresión de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 por la izquierda vale 0, es claro que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{1}{2}$ tal que si $0 < 1 - x < \dfrac{1}{2}$ entonces

$$0 < 1 - x \quad \Rightarrow \quad x < 1$$

$$1 - x < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2} < x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < x$$

es decir $\dfrac{1}{2} < x < 1$ luego $f(x) = 0$ y

$$|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

17. FUNCIONES CONTINUAS

17.1. *Estudiar la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2-2x+\dfrac{3}{2} & si \quad x>1 \end{cases}.$$

Solución

En $(-\infty, 0)$, en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$ la función f es continua pues es o constante o polinómica. Por tanto, los únicos puntos en los que podría no ser continua es en $x = 0$ y $x = 1$.

En $x = 0$,

$$f(0) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + 1 = 1$$

por tanto, f es continua en $x = 0$, pues

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 1.$$

En $x = 1$,

$$f(1) = 1$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 = 1$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 - 2x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

como $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$ la función no es continua en $x = 1$.

17.2. *Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{x+1} & si \quad -1 < x \leqslant 2 \\ \dfrac{x-2}{x^2 - 5x + 6} & si \quad x > 2 \quad \text{y} \quad x \neq 3 \\ 5 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}.$$

Solución

En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función es continua pues es cociente de dos funciones continuas (la función idénticamente 1 y la función polinómica x) y el denominador no se anula en dicho intervalo.

En $x = -1$,

$$f(-1) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = -1$$

y

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty$$

luego $f(x)$ no es continua en $x = -1$, pues

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim_{x \to -1^+} f(x).$$

En el intervalo $(-1, 2)$, la función es continua por las mismas razones que anteriormente.

En $x = 2$,

$$f(2) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

y

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x^2-5x+6},$$

resulta la indeterminación $\frac{0}{0}$, que resolvemos dividiendo numerador y denominador por $(x - 2)$, y

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-3} = -1$$

luego $f(x)$ no es continua en $x = 2$, pues

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

En el intervalo $(2, +\infty)$, la función es cociente de dos polinomios, el numerador $(x - 2)$ y el denominador $(x - 2)(x - 3)$; por tanto, la función será continua en los puntos donde el denominador no se anule, o sea será continua en los intervalos $(2, 3)$ y $(3, +\infty)$. Falta ver en el punto $x = 3$

$$f(3) = 5$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0} = \infty$$

luego $f(x)$ no es continua en $x = 3$, pues

$$f(3) \neq \lim_{x\to 3} f(x).$$

17.3. *Estudiar la continuidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1] \\ x^2 + 1 + 2x & \text{si} \quad x \in (1, 10] \\ \dfrac{121}{10}x & \text{si} \quad x \in (10, +\infty). \end{cases}$$

Solución

En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función está bien definida pues siempre $x^2 - 1 > 0$ y por tanto la raíz cuadrada es un número real. Además $f(x)$ en dicho intervalo es continua pues es composición de

$$\begin{aligned} f_1 : (-\infty, -1] &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x \quad &\longrightarrow x^2 - 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_2 : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longrightarrow \sqrt{x} \end{aligned}$$

que son funciones continuas.

En $x = -1$,

$$f(-1) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \sqrt{x^2 - 1} = 0$$

y

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 + 1 + 2x = 0$$

luego $f(x)$ es continua en $x = -1$, pues

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x).$$

En el intervalo $(-1, 10)$ la función $f(x)$ es un polinomio de orden 2, que es continuo.

En $x = 10$,

$$f(10) = 121$$

$$\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^-} x^2 + 1 + 2x = 121$$

y

$$\lim_{x \to 10^+} f(x) = \lim_{x \to 10^+} \frac{121}{10} x = 121$$

luego $f(x)$ es continua en $x = 10$, pues

$$f(10) = \lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^+} f(x).$$

Claramente la función es continua en el intervalo $(10, +\infty)$.

17.4. *Estudiar la continuidad y hallar los límites en los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$ de la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & si \quad -\infty < x \leqslant -1 \\ \dfrac{2x + 2}{x^2 + x} & si \quad -1 < x < 0 \\ 3x - 2 & si \quad 0 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{x + 6}{2} & si \quad 2 < x < +\infty \end{cases}.$$

Solución

Calculemos primero los límites para luego estudiar la continuidad.

Como la función viene definida en los puntos $x = -1$, $x = 0$ y

$x = 2$ por dos expresiones distintas será necesario calcular los límites por la derecha y por la izquierda.

En $x = -1$,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2x+2}{x^2+x} = \lim_{x \to -1^+} \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{2}{x} = -2$$

y

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} -2x - 4 = -2(-1) - 4 = -2.$$

En $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x - 2 = -2$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x + 2}{x^2 + x} = -\frac{2}{0} = -\infty.$$

En $x = 2$,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x + 6}{2} = 4$$

y

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x - 2 = 4.$$

Estudiemos la continuidad de $f(x)$. En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es un polinomio luego es continua. En el intervalo $(-1, 0)$ la función es cociente de dos polinomios, pero el polinomio del denominador no se anula en ningún punto de dicho intervalo, por tanto, es también continua. De forma análoga se hace para los intervalos $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$. Veamos qué ocurre en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$.

En $x = -1$,

$$f(-1) = -2 = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

por tanto, $f(x)$ es continua en $x = -1$.

En $x = 0$, la función es discontinua pues el límite por la derecha y por la izquierda son distintos.

En $x = 2$, la función no está definida, por tanto, no podemos hablar de continuidad.

17.5. *Estudiar la continuidad y hallar los límites en los puntos $x = -2$, $x = -1$ y $x = 1$ de la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+8}{3} & si \quad -\infty < x \leqslant -2 \\ 4 + x & si \quad -2 < x \leqslant -1 \\ \dfrac{6x-6}{x^2-1} & si \quad -1 < x \leqslant 1 \\ 3x & si \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Solución

Hallemos los límites en los puntos

$$x = -2, \quad x = -1 \quad y \quad x = 1.$$

En $x = -2$,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x+8}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

y

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 4 + x = 4 - 2 = 2.$$

Como el límite por la derecha y por la izquierda de la función $f(x)$ coinciden con $f(-2) = 2$, podemos asegurar que $f(x)$ es continua en $x = -2$.

En $x = -1$,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 4 + x = 4 - 1 = 3$$

y

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{6x-6}{x^2-1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{6(x-1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{6}{x+1} = \frac{6}{0} = +\infty.$$

Por tanto, la función no es continua en $x = -1$.

En $x = 1$,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{6x-6}{x^2-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{6(x-1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{6}{x+1} = 3$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3x = 3.$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$, pues

$$f(1) = 3 = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

En los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$ y $(1, \infty)$ la función es continua pues es un polinomio.

En el intervalo $(-1, 1)$ la función es continua pues es cociente de dos polinomios y el denominador no se anula en todo el intervalo $(-1, 1)$.

17.6. *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2x+4} & si \quad -\infty < x < -2 \\ 2 & si \quad x = -2 \\ \dfrac{x^2-4}{4x-8} & si \quad -2 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{4x-4} & si \quad 1 < x < 2 \\ 2x-3 & si \quad 2 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Solución

Estudiemos primero la continuidad de la función en aquellos intervalos donde está definida por una única expresión.

En $(-\infty, -2)$, la expresión es $\dfrac{x^2-4}{2x+4}$, como la función es cociente de dos polinomios sólo será discontinua en los puntos donde se anule el denominador. Resolviendo $2x + 4 = 0$, se tiene que $x = -2$, pero este punto no está en $(-\infty, -2)$, luego $f(x)$ es continua en dicho intervalo.

En $(-2, 1)$, la expresión es $\dfrac{x^2-4}{4x-8}$, pero $x = 2$ es la única raíz del polinomio denominador y no está en $(-2, 1)$, luego la función es continua en todo el intervalo $(-2, 1)$.

En $(1, 2)$, la expresión es $\dfrac{x^2+x-2}{4x-4}$, luego $x = 1$ es la raíz del polinomio denominador, que no pertenece a $(1,2)$ y, por tanto, la función es continua en todo el intervalo $(1,2)$.

En $(2,\infty)$, la función es el polinomio $2x-3$ con lo que es continua en $(2,\infty)$.

En $x=-2$, como la expresión de la función varía por la derecha y por la izquierda, calculemos sus límites respectivos

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{2x+4} =$$

$$= \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x-2}{2} = -2.$$

y

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-4}{4x-8} =$$

$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{4(x-2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{4} = 0$$

por tanto, como $\lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$ la función no es continua en $x=-2$, independientemente del valor que la función tome en dicho punto.

En $x=1$,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{4x-8} = \frac{1-4}{4-8} = \frac{3}{4}$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{4x-4}$$

al sustituir x por 1 aparece una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que resolvemos de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{4(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{4} = \frac{3}{4}.$$

Además, $f(1) = \dfrac{1^2 - 4}{4 \cdot 1 - 8} = \dfrac{3}{4}$.

Como los límites coinciden y son iguales a $f(1)$ la función es continua en $x = 1$.

En $x = 2$,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 2}{4x - 4} = \frac{2^2 + 2 - 2}{4 \cdot 2 - 4} = 1$$

y

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 2x - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Como $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$, los límites por la derecha y por la izquierda en $x = 2$ coinciden con $f(2)$ y por tanto la función es continua en $x = 2$.

17.7. *Estudiar la continuidad de la función racional*

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

teniendo en cuenta donde está definida.

Solución

La expresión de $f(x)$ estará bien definida en todo punto que no anule al denominador, y en dichos puntos será continua, pues es cociente de dos funciones polinómicas que sabemos son continuas.

Las raíces del denominador son $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$, luego en estos puntos la continuidad tiene que ser comprobada.

Tenemos que

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

luego $f(x)$ es continua en $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, pero no en $x_3 = 3$.

17.8. *Probar que la ecuación* $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$ *tiene una solución entre* 0 *y* 2.

Solución

Sea la función polinómica $f(x)$ definida en $[0, 2]$ por

$$f(x) = x^4 - 9x^2 + 18$$

esta función es continua y $f(0) = 18$ y $f(2) = -2$, luego por el teorema de Bolzano existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

En este caso particular se podría haber resuelto el problema simplemente resolviendo la ecuación,

$$x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 18}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}$$

entonces,

$$x = \pm\sqrt{6}, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

y efectivamente $x = \sqrt{3} \in (0, 2)$.

17.9. *Probar que la ecuación $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$ tiene una solución comprendida entre 0 y 2.*

Solución

Consideremos la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$, definida en el intervalo $[0, 2]$.

Por ser $f(x)$ una función polinómica es continua y como $f(0) = -6$ y $f(2) = 4$, aplicando el teorema de Bolzano podemos asegurar que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

El número c es por tanto solución de la ecuación pedida.

17.10. *Sean las siguientes funciones*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geqslant 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y g, y la continuidad de $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución

La función f es claramente continua en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Veamos en $x = 0$,

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

por tanto, f es continua en $x = 0$, pues

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

La función $g(x)$ es constante en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ luego es continua, pero

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$$

luego no es continua en $x = 0$.

La función $f \circ g(x) \equiv 1$, luego es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función $g \circ f(x) \equiv 1$, luego es continua en todo $\mathbb{R}$.

Nota: Obsérvese que la composición ha «arreglado» la discontinuidad de g.

17.11. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$, y encontrar la forma que tienen todas las funciones de este tipo.*

Solución

Se tiene

$$|f(x) - f(y)| = |f(x \cdot 1) - f(y \cdot 1)| = |xf(1) - yf(1)| = \\ = |f(1) \cdot (x - y)| = |f(1)|\,|x - y|.$$

Puede ocurrir que $f(1) = 0$ o que $f(1) \neq 0$.

Si $f(1) = 0$, tenemos que ver que dado $\varepsilon > 0$, existe un δ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(y)| = |f(1)|\,|x - y| = 0$$

luego para todo $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = 1$ se tiene que si $|x - y| < 1$, entonces

$$|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$$

Si $f(1) \neq 0$, tenemos

$$|f(x) - f(y)| = |f(1)|\,|x - y| < |f(1)| \cdot \delta$$

luego dado $\varepsilon > 0$ y $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|f(1)|}$ se tiene que si $|x - y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|f(1)|} \cdot |f(1)| = \varepsilon$$

luego f es uniformemente continua.

Por otra parte, si f tiene la propiedad del enunciado, se cumple que

$$f(x) = x \cdot f(1) = A \cdot x \quad \text{donde} \quad A = f(1)$$

luego f es un homomorfismo biyectivo sobre $\mathbb{R}$.

17.12. *Probar que el polinomio* $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *tiene al menos una raíz, si n es impar.*

Solución

En efecto calculemos los límites de la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^n} \cdot \lim_{x \to -\infty} x^n =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x_n}\right) \cdot \lim_{x \to -\infty} x^n = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Análogamente,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \cdot \infty = \infty.$$

Pero $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ significa que dado $M > 0$, existe $N > 0$ tal que si $x > N$, entonces $f(x) > M$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ significa que dado $M' < 0$, existe $N' < 0$ tal que si $x < N'$ entonces $f(x) < M'$.

Pues bien, tomemos $M = 1$ y $M' = -1$ para lo cual dado $M = 1$, existe $\alpha > 0$ tal que si $x > \alpha$ entonces $f(x) > 1$ y dado $M' = -1$, existe $\beta < 0$ tal que si $x < \beta$ entonces $f(x) < -1$.

Como

$$\beta - 1 < \beta \text{ resulta que } f(\beta - 1) < -1$$

y

$$\alpha + 1 > \alpha \text{ resulta que } f(\alpha + 1) > 1$$

luego

$$f(\beta - 1) < -1 < 1 < f(\alpha + 1)$$

y por el teorema de Bolzano, existe $\gamma \in (\beta - 1, \alpha + 1)$ tal que $f(\gamma) = 0$.

17.13. *Demostrar que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ para todo x racional tiene que ser la función idénticamente nula.*

Solución

Supongamos que existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) \neq 0$, y vamos a probar que f no es continua en z.

En efecto, si tomamos $\varepsilon = \dfrac{|f(z)|}{2}$ y cualquier $\delta > 0$ se tiene que sí y es racional y $|z - y| < \delta$, entonces

$$|f(z) - f(y)| = |f(z) - 0| = |f(z)| > \frac{|f(z)|}{2} = \varepsilon$$

luego f no es continua en z, contradiciendo la hipótesis de que f es continua en $\mathbb{R}$.

17.14. *Probar que existe una función continua y acotada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que no alcanza el supremo y el ínfimo. ¿Contradice este ejemplo el teorema de Weierstrass?*

Solución

Sea $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. Como el denominador no se anula, la función está bien definida en todo $\mathbb{R}$.

Veamos que es continua: como $f(x) = x \cdot \frac{1}{1+|x|}$, si probamos que $\frac{1}{1+|x|}$ es continua, f lo será, pues es producto de dos funciones continuas. Pero la función $g(x) = \frac{1}{1+|x|}$ es la compuesta

de $\quad g_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$
$\qquad\quad x \to |x|$

de $\quad g_2 : [0, \infty) \to [1, \infty)$
$\qquad\quad x \to 1 + x$

y de $\quad g_3 : [1, \infty) \to \mathbb{R}$
$\qquad\quad x \to \frac{1}{x}$

que son continuas, luego $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ es continua.

Por otra parte, 1 es cota superior de f y -1 cota inferior, en efecto,

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1.$$

Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+|x|} = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+|x|} = -1$

está claro que

$$1 = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad -1 = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Ahora bien, no existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $f(\alpha) = 1$ y $f(\beta) = 1$ pues claramente

$$\frac{\alpha}{1+|\alpha|} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{1+|\beta|} > -1.$$

El ejemplo no contradice el teorema de Weierstrass, pues $\mathbb{R}$ no es un intervalo de la forma $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

17.15. *Sean f y g dos funciones continuas definidas en un intervalo $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$. Demostrar que existe al menos un $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = g(x)$.*

Solución

Consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x)$, que es continua en $[a, b]$.

Por las hipótesis

$$h(a) = f(a) - g(a) > 0$$

y

$$h(b) = f(b) - g(b) < 0$$

luego por el teorema de Bolzano existe $x \in [a, b]$ tal que $h(x) = 0$. Esto quiere decir que $f(x) - g(x) = 0$ es decir $f(x) = g(x)$.

17.16. *Probar que la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ es inyectiva y que su inversa es continua en su intervalo de definición.*

Solución

La función f está bien definida en todo $\mathbb{R}$ pues el denominador no se anula.

Veamos que f es inyectiva, es decir veamos que si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1 + |x|} = \frac{y}{1 + |y|} \Rightarrow x(1 + |y|) = y(1 + |x|).$$

Se pueden presentar los siguientes casos:

a) $x, y \geqslant 0$, entonces

$$x(1 + |y|) = y(1 + |x|) \Rightarrow x(1 + y) = y(1 + x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y.$$

b) $x, y \leqslant 0$, entonces

$$x(1 + |y|) = y(1 + |x|) \Rightarrow x(1 - y) = y(1 - x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - xy = y - xy \Rightarrow x = y.$$

c) El caso $x < 0$, $y > 0$ o bien $x > 0$, $y < 0$ no puede darse, pues siempre $|x| > 0$ y $|y| > 0$; por tanto $1 + |x| > 0$ y $1 + |y| > > 0$ y no sería $f(x) = f(y)$ pues tendríamos un número positivo igual a un número negativo. Por tanto, f es inyectiva.

Para ver que f^{-1} es continua aplicamos el siguiente resultado:

«Si f es continua y creciente (respectivamente decreciente) en un intervalo I. Entonces f^{-1} es continua y creciente (respectivamente decreciente) en $f(I)$».

Comprobemos que f es continua y creciente.

Dado un x_0 genérico y un $\varepsilon > 0$ tenemos que ver que existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x}{1 + |x|} - \frac{x_0}{1 + |x_0|}\right| =$$

$$= \left|\frac{x(1 + |x_0|) - x_0(1 + |x|)}{(1 + |x|)(1 + |x_0|)}\right| < |x(1 + |x_0|) - x_0(1 + |x|)| =$$

$$= |x + x|x_0| - x_0 - x_0|x|| = |x - x_0 + x|x_0| - x_0|x|| \leqslant$$

$$\leqslant |x - x_0| + |x|x_0| - x_0|x|| =$$

$$= |x - x_0| + |x|x_0| - x_0|x_0| + x_0|x_0| - x_0|x|| \leqslant$$

$$\leqslant |x - x_0| + |x_0||x - x_0| + |x_0|\,||x_0| - |x||.$$

Pero

$$\left.\begin{array}{l}|x|=|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y|\leqslant|x-y| \\ |y|=|x+y-x|\leqslant|x|+|y-x|=|x|+|x-y| \Rightarrow |y|-|x|\leqslant|x-y|\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ||x|-|y|| \leqslant |x-y|$$

luego la última expresión será

$$\begin{aligned}\leqslant |x-x_0| + |x_0|\,|x-x_0| + |x_0|\,|x-x_0| &= \\ = |x-x_0|(1+|x_0|+|x_0|) &= \\ = |x-x_0|(1+2|x_0|) &< \delta(1+2|x_0|).\end{aligned}$$

Luego dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$ se tiene que si $|x-x_0| < \delta$ entonces $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Por tanto f es continua. Veamos que f es creciente, es decir si $x \leqslant y$ entonces $f(x) \leqslant f(y)$, pero

$$f(x) \leqslant f(y) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{1+|x|} \leqslant \frac{y}{1+|y|} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x(1+|y|) \leqslant y(1+|x|) \quad\Leftrightarrow\quad x + x|y| \leqslant y + y|x|.$$

Supongamos:

a) $x, y \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\text{Si } x \leqslant y \quad&\Rightarrow\quad x + xy \leqslant y + xy \\ &\Rightarrow\quad x + x|y| \leqslant y + y|x| \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \leqslant f(y).\end{aligned}$$

b) $x, y \leqslant 0$.

Si $x \leqslant y \Rightarrow x + x|y| \leqslant y + y|x|$ pues

$$x|y| = -|x|\,|y| = -|xy|$$
$$y|x| = -|y|\,|x| = -|xy|$$

luego $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$

c) $x \leqslant 0 < y$.

En este caso tenemos que $x < y$ y además $x|y| \leqslant 0$ luego

$$\left.\begin{array}{l} x < y \\ x|y| \leqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x + x|y| < y + 0$$

pero $0 \leqslant y|x|$ luego

$$x + x|y| < y + y|x| \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Por tanto, f es creciente.

Luego f^{-1} es continua como queríamos demostrar.

17.17. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Probar que son equivalentes:*

a) f es continua en $x_0 \in [a, b]$.

b) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $[a, b]$ que converge a x_0, se tiene que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Solución

a) $\Rightarrow$ b): Tenemos que ver que, dado un $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Pero que f sea continua en x_0 significa que dado un $\varepsilon > 0$, en particular el ε anterior, existirá un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Como (x_n) converge a x_0, tenemos que dado el δ anterior, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ entonces $|x_n - x_0| < \delta$ y por tanto $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Luego $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.

b) $\Rightarrow$ a): Supongamos que para toda sucesión (x_n) que converge a x_0 se tiene que $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.

Si f no fuera continua en x_0 tendríamos que para todo $\delta > 0$ existiría un x_δ tal que si $|x_\delta - x_0| < \delta$ entonces $|f(x_\delta) - f(x_0)| > \varepsilon$.

En particular, para $\delta = \dfrac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, existiría $x_n = x_{1/n}$ tal que

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego x_n converge a x_0, pues dado $\varepsilon > 0$ existirá un n_0 tal que si $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, entonces para todo $n \geqslant n_0$ tenemos

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

pero $f(x_n)$ no converge a $f(x_0)$.

Nota: Este problema da un buen criterio para probar que una función no es continua en un punto.

17.18. *Probar donde es continua la función*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \\ -x & \text{si} \quad x \text{ es racional.} \end{cases}$$

Solución

Para resolver este problema aplicamos el resultado del problema 17.17, es decir probar que f es continua en x_0 es equivalente a ver que para toda sucesión (x_n) que converge a x_0 tenemos que $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.

Dado un x_0, para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos el intervalo $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, en este intervalo existirán r_n, $i_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, siendo r_n racional e i_n irracional tales que

si (r_n) tiende a x_0 entonces $f(r_n)$ tiende a $f(x_0)$

y

si (i_n) tiende a x_0 entonces $f(i_n)$ tiende a $f(x_0)$.

Pero por la definición de f tenemos que

$$f(r_n) = -r_n \quad \text{y} \quad f(i_n) = i_n.$$

Por otra parte

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) = \lim_{n \to \infty} -r_n = -x_0$$

y

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(i_n) = \lim_{n \to \infty} i_n = x_0 \quad .$$

Luego deducimos que $x_0 = -x_0$ y esto sólo puede ocurrir en el caso de ser $x_0 = 0$. Veamos en efecto que f es continua en $x_0 = 0$: Por ser 0 un número racional $f(0) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $|x - 0| < < \delta$ entonces $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| =$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{x \notin Q}{\underset{x\,\text{irracional}}{=}} |x| \\ &\overset{x \in Q}{\underset{x\,\text{racional}}{=}} |-x| = |x| \end{aligned}\right\} = |x| < \delta.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ tenemos que si $|x - 0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ luego f es continua en cero.

17.19. *Sea f la función definida en $[0, 1]$ por*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \text{ es racional} \\ 1 - x & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f.

Solución

Para resolver este problema aplicamos la técnica del problema 17.17, es decir f será continua en x_0 si toda sucesión (x_n) que converge a x_0 se tiene que $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.

Tomemos una sucesión (r_n) de números racionales que converge a x_0 y una sucesión (i_n) de números irracionales que converge también a x_0, entonces

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) = \lim_{n \to \infty} r_n = x_0$$

y

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(i_n) = \lim_{n \to \infty} (1 - i_n) = 1 - \lim_{n \to \infty} i_n = 1 - x_0.$$

Por tanto, para que f sea continua en x_0 ha de verificarse que

$$x_0 = 1 - x_0 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

Luego sólo puede ser continua en $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Veamos en efecto que f es continua en $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Dado un $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \delta$ entonces $\left|f(x) - f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$

$$\left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \left.\begin{array}{ll} \underset{x \text{ racional}}{x \in Q} & \left|x - \dfrac{1}{2}\right| \\ \underset{x \text{ irracional}}{x \notin Q} & \left|(1 - x) - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{2} - x\right| = \left|x - \dfrac{1}{2}\right| \end{array}\right\} = \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que si $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \delta$, entonces $\left|f(x) - f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$, luego f es continua en $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

17.20. *Probar que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que cumple la condición $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ con $k > 0$ y todo x e y pertenecientes a $\mathbb{R}$, es continua.*

Solución

Tenemos que ver que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Aplicando la condición del enunciado tenemos

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| < k \cdot \delta$$

por tanto, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, tenemos que si $|x - y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Luego f es continua.

Nota: La condición anterior se denomina de Lipschitz.

17.21. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que cumple*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

con $0 < k < 1$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que existe un único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = \alpha$.

Solución

Tomemos un $x_0 \in \mathbb{R}$ y vamos a construir la sucesión (x_n) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0)\\
x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)\\
x_3 &= f(x_2) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0)\\
&\vdots\\
x_n &= f(x_{n-1}) = f^n(x_0).
\end{aligned}$$

Veamos que esta sucesión es convergente:

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - x_n| &= |f^{n+1}(x_0) - f^n(x_0)| = \\ &= |f(f^n(x_0)) - f(f^{n-1}(x_0))| \leqslant \\ &\leqslant k|f^n(x_0) - f^{n-1}(x_0)| = \\ &= k|x_n - x_{n-1}|\end{aligned}$$

luego tendremos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}|x_n - x_{n-1}| &\leqslant k|x_{n-1} - x_{n-2}| \\ |x_{n-1} - x_{n-2}| &\leqslant k|x_{n-2} - x_{n-3}| \\ &\vdots \\ |x_3 - x_2| &\leqslant k|x_2 - x_1|\end{aligned}$$

multiplicando miembro a miembro y simplificando se tiene:

$$\begin{aligned}&|x_n - x_{n-1}| \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}| \cdots |x_3 - x_2| \leqslant \\ &\leqslant k \overset{(n-2}{\cdots\cdots} k|x_{n-1} - x_{n-2}| \cdots |x_2 - x_1|\end{aligned}$$

es decir,

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant k^{n-2}|x_2 - x_1|$$

pero $0 < k < 1$ luego cuando n tiende a ∞ tenemos que k^{n-2} tiende a cero, por tanto

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x_{n-1}| = 0$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n-1} = \alpha.$$

Por tanto,

$$f(\alpha) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha.$$

Veamos ahora que es único. Supongamos que existieran α_1 y α_2, verificando las condiciones del enunciado entonces:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leqslant k|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

ya que $0 < k < 1$, por tanto $|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$ lo que es absurdo.

17.22. *Probar aplicando la definición que la función $f(x) = x^n$ en (α, β) es uniformemente continua.*

Solución

Tenemos que probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

En efecto

$$\begin{gathered} |f(x) - f(y)| = |x^n - y^n| = \\ = |x - y|\,|x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \cdots + x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}| \leqslant \\ \leqslant |x - y|(|x^{n-1}|\,|y^0| + |x^{n-2}|\,|y^1| + \\ + |x^{n-3}|\,|y^2| + \cdots + |x^1|\,|y^{n-2}| + |x^0|\,|y^{n-1}|). \end{gathered}$$

Sea $A = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Cada sumando es de la forma

$$|x^{n-i}|\,|y^{i-1}| \quad \text{con} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

luego

$$|x|^{n-i}|y|^{i-1} \leqslant A^{n-i} \cdot A^{i-1} = A^{n-i+i-1} = A^{n-1}.$$

Por tanto

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|(A^{n-1} \cdot n) < \delta(A^{n-1} \cdot n).$$

Luego dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{A^{n-1} \cdot n}$ se tiene que si $|x - y| <$ $< \delta$, entonces $|x^n - y^n| < \varepsilon$ es decir, $f(x) = x^n$ es uniformemente continua.

17.23. *Probar que la función $f(x) = x^n$ definida en $[0, \infty)$ no es uniformemente continua.*

Solución

Supongamos que fuese uniformemente continua, entonces tendríamos que dado $\varepsilon > 0$ existiría $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|x^n - y^n| < \varepsilon$.

Tomemos $x = k > 0$ e $y = k + \dfrac{\delta}{2}$ que verifican que $|x - y| < \delta$ pues

$$|x - y| = \left|k - \left(k + \frac{\delta}{2}\right)\right| = \left|-\frac{\delta}{2}\right| < \delta.$$

Entonces

$$\varepsilon > |x^n - y^n| = \left|k^n - \left(k + \frac{\delta}{2}\right)^n\right| =$$

$$= \left|k^n - \binom{n}{0}k^n - \binom{n}{1}k^{n-1}\frac{\delta}{2} - \binom{n}{2}k^{n-2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \cdots\right.$$

$$\left. - \binom{n}{n-1}k\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1} - \binom{n}{n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^n\right| =$$

$$= \left|\binom{n}{1}k^{n-1}\frac{\delta}{2} + \binom{n}{2}k^{n-2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{n-1}k\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1} + \binom{n}{n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^n\right| \geqslant$$

$$\geqslant \binom{n}{1}k^{n-1}\frac{\delta}{2} = nk^{n-1}\frac{\delta}{2} \xrightarrow[k\mapsto\infty]{} \infty$$

lo que implicaría que $\varepsilon = \infty$, que es una contradicción.

17.24. *Probar que una función $f(x)$ continua en toda la recta es uniformemente continua en todo intervalo acotado I.*

Solución

Si I es cerrado, entonces la aplicación directa del teorema que asegura que una función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua, resuelve el problema.

Supongamos que $I = (\alpha, \beta)$, es un intervalo abierto, entonces extendemos la función f de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad \alpha < x < \beta \\ f(\alpha^+) & \text{si} \quad x = \alpha \\ f(\beta^-) & \text{si} \quad x = \beta. \end{cases}$$

La función g es obviamente continua, y como está definida en $[\alpha, \beta]$ es uniformemente continua; por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\alpha \leqslant x \leqslant y \leqslant \beta$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Si x, y pertenecen a (α, β) la última desigualdad se convierte en $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, con lo que se demuestra que f es uniformemente continua.

17.25. *Probar que dadas $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas:*

a) $f + g$ *es uniformemente continua.*

b) $-f$ *es uniformemente continua.*

c) $f \cdot g$ *no tiene por qué ser uniformemente continua.*

Solución

a) Que f sea uniformemente continua significa que dado $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - y| < \delta_1$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon_1.$$

Que g sea uniformemente continua significa que dado $\varepsilon_2 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|x - y| < \delta_2$ entonces

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon_2.$$

Tomemos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ y x, y tales que $|x - y| < \delta$ con $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$\begin{aligned}|(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| = \\ &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

luego $f + g$ es uniformemente continua.

b) Que f sea uniformemente continua significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$|(-f)(x) - (-f)(y)| = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

luego $-f$ es uniformemente continua.

c) Veamos un contraejemplo.

Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$, veamos que son uniformemente continuas.

Sean x, y tales que $|x - y| < \delta$,

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta$$

luego dado $\varepsilon > 0$ tomando $\delta = \varepsilon$ se tiene que si $|x - y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

luego f y g son uniformemente continuas.

Veamos que $f \cdot g(x) = x^2$ no es uniformemente continua.

Supongamos que fuese uniformemente continua, es decir que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|x^2 - y^2| < < \varepsilon$.

Tomemos x e y de la forma $x = k > 0$, $y = k + \dfrac{\delta}{2}$ y $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, entonces

$$|x - y| = \left|k - \left(k + \frac{\delta}{2}\right)\right| = \left|k - k - \frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

y

$$\frac{1}{2} = \varepsilon > |x^2 - y^2| = \left|k^2 - \left(k + \frac{\delta}{2}\right)^2\right| =$$

$$= \left|k^2 - k^2 - \delta k - \frac{\delta^2}{4}\right| = \left|\delta k + \frac{\delta^2}{4}\right| > \delta k.$$

Luego para $k > \frac{1}{\delta}$ llegamos a que

$$\frac{1}{2} > \delta k > \delta \cdot \frac{1}{\delta} = 1$$

es decir $\frac{1}{2} > 1$ absurdo.

Por tanto, $f \cdot g$ no tiene por qué ser uniformemente continua.

18. FUNCIONES DERIVABLES

18.1. *Calcular la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f_1(x) = x^7 + x^5 + 3.$

b) $f_2(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)^5.$

c) $f_3(x) = x^{7/3} \cdot (1 + x^2).$

d) $f_4(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$

Solución

a) $f'_1(x) = 7x^{(7-1)} + 5x^{(5-1)} + 0 = 7x^6 + 5x^4.$

b) $$\begin{aligned} f'_2(x) &= 2x(x^2 + 1)^5 + 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x(x^2 - 1) = \\ &= 2x(x^2 + 1)^4[(x^2 + 1) + 5(x^2 - 1)] = \\ &= 2x(x^2 + 1)^4(6x^2 - 4). \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} f'_3(x) &= \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1}(1 + x^2) + 2xx^{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}(1 + x^2) + 2x^{\frac{10}{3}} = \\ &= \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{7}{3}x^{\frac{10}{3}} + 2x^{\frac{10}{3}} = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{13}{3}x^{\frac{10}{3}}. \end{aligned}$$

d) $$f'_4(x) = \frac{(2x\sqrt{x^2-1}) - \left(x^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right)}{(\sqrt{x^2-1})^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2-1) - x^3}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^3-2x}{(x^2-1)^{3/2}}.$$

18.2. *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x > 0 \\ -x^2 & si \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Estudiar la derivabilidad de $f(x)$, y de $f'(x)$ donde esté definida.

Solución

En $x > 0$, la función es derivable por ser producto de la función $g(x) = x$ por ella misma. La derivada es:

$$f'(x) = 2x \quad \text{si} \quad x > 0.$$

En $x < 0$, la función es derivable por razones análogas y la derivada es

$$f'(x) = -2x \quad \text{si} \quad x < 0.$$

En $x = 0$, la función es continua claramente. Estudiemos la derivabilidad

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h = 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} -h = 0$$

luego la función es derivable en $x = 0$, y $f'(0) = 0$.

La función derivada está definida en todo $\mathbb{R}$ y su expresión es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x > 0 \\ -2x & \text{si} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Para estudiar $f''(x)$, se tiene que tanto en $x > 0$, como en $x < 0$ la función $f'(x)$ es derivable y

$$f''(x) = 2 \qquad \text{si} \quad x > 0$$

y

$$f''(x) = -2 \quad \text{si} \quad x < 0.$$

En $x = 0$, la función $f'(x)$ es continua y $f'(0) = 0$, pero

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f'(0 + h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h - 0}{h} = 2$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f'(0 + h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-2h - 0}{h} = -2$$

luego $f'(x)$ no es derivable en $x = 0$. (Aunque $f'(x)$ sí es continua.)

18.3. *Estudiar la derivabilidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \textit{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 1 & \textit{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Solución

En $x < 0$, la función es suma de las funciones derivables 1 y x^2, por tanto es derivable y su derivada es

$$f'(x) = -2x \quad \text{si} \quad x < 0.$$

Por la misma razón, la función es derivable en $x > 0$, y su derivada es

$$f'(x) = 2x \quad \text{si} \quad x > 0.$$

En $x = 0$, la función f no es continua, puesto que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - x^2) = 1$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

por tanto, la función no puede ser derivable en $x = 0$.

Nota: Obsérvese que $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$, pero esto no implica la derivabilidad en 0. De hecho:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 - h^2 - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2 - h^2}{h} = -\infty.$$

18.4. *Estudiar la derivabilidad de la función valor absoluto*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Solución

Veamos si existe el $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Si $x > 0$, tomemos $0 < |h| < \dfrac{|x|}{2}$, entonces $|x + h| = x + h$ y se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Si $x < 0$, tomemos $0 < |h| < \dfrac{|x|}{2}$, entonces $|x + h| = -(x + h)$ y se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)-(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

Veamos en $x = 0$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

luego en $x = 0$, la función no es derivable. Por tanto $f(x) = |x|$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

18.5. *Calcular la derivada, donde exista, de la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} & si \quad x \leqslant -1 \\ -\sqrt{|x|} & si \quad -1 < x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & si \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} & si \quad x > 1. \end{cases}$$

Solución

Veamos previamente la continuidad de la función, pues en aquellos puntos en los que la función $f(x)$ no fuese continua no podría ser derivable. Es obvio que la función es continua en

$$\{x : x < -1\} \cup \{x : 0 < x < 1\} \cup \{x : x > 1\}.$$

En el conjunto $\{x : -1 < x < 0\}$, la función $f(x)$ es composición de la función

$$\begin{aligned} g : (-1, 0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow |x| \end{aligned}$$

y de la función

$$\begin{aligned} h : (0, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow -\sqrt{x} \end{aligned}$$

que son continuas, luego f también es continua en

$$\{x : -1 < x < 0\}.$$

Estudiemos ahora la continuidad en aquellos puntos en los cuales $f(x)$ tiene distinta expresión por la derecha y por la izquierda.

En $x = -1$,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -1$$

y

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} -\sqrt{|x|} = -1$$

de donde

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$$

y la función es continua en $x = -1$.

En $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -\sqrt{|x|} = 0$$

de donde

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

luego también es continua en $x = 0$.

En $x = 1$,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 1$$

y

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1$$

de donde $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$.

La función f es continua en todo $\mathbb{R}$. Por tanto puede ser derivable en todo $\mathbb{R}$, de hecho en los conjuntos anteriormente enunciados o es polinómica o es derivable claramente, bien por ser inversa de función derivable (en $0 < x < 1$) o composición de funciones derivables (en $-1 < x < 0$).Resultando

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Comprobemos (*), en $-1 < x < 0$,

$$f(x) = h \circ g(x)$$

donde h y g son las funciones establecidas en la primera parte del problema, entonces

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

pero $h'(g(x)) = \dfrac{-1}{2\sqrt{|x|}}$ y $g'(x) = -1$.

Para finalizar el problema, veamos los casos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

En $x = -1$,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\left(\frac{1}{2}(-1+h) - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \frac{1}{2}.$$

y

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-\sqrt{|-1+h|} - \left(\frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-\sqrt{1-h}+1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1-\sqrt{1-h})(1+\sqrt{1-h})}{h(1+\sqrt{1-h})} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1-(1-h)}{h(1+\sqrt{1-h})} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h(1+\sqrt{1-h})} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{1-h}} = \frac{1}{2}.$$

Luego la función es derivable en $x = -1$ y su derivada es $\frac{1}{2}$.

En $x = 1$,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{2}(1+h)+\frac{1}{2}\right)-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \frac{1}{2}.$$

Luego la función es derivable en $x = 1$ y su derivada es $\frac{1}{2}$.

En $x = 0$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{-h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{|h|} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{\sqrt{|h|}\,\sqrt{|h|}} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{|h|}} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

luego f no es derivable en $x = 0$.

Por tanto

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

18.6. *Calcular $f''(x)$ de la función*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5}{(x-1)(x-2)}$$

definida en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Solución

Hallemos la primera derivada, como $f(x)$ es una función racional es derivable salvo en los puntos donde se anula el denominador. Por las reglas usuales de derivación se obtiene:

$$f'(x) = \frac{6x(x-1)(x-2) - (3x^2+5)[(x-1)+(x-2)]}{(x-1)^2(x-2)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 - 18x^2 + 12x - 6x^3 + 9x^2 - 10x + 15}{(x-1)^2(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-9x^2 + 2x + 15}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

que está definida en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Hallemos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(-18x+2)(x-1)^2(x-2)^2 - (-9x^2+2x+15)[2(x-1)(x-2)^2 + 2(x-2)(x-1)^2]}{(x-1)^4(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(-18x+2)(x-1)(x-2) - (-9x^2+2x+15)[2(x-2)+2(x-1)]}{(x-1)^3(x-2)^3} =$$

$$= \frac{-18x^3 + 56x^2 - 42x + 4 - (-36x^3 + 62x^2 + 48x - 90)}{(x-1)^3(x-2)^3} =$$

$$= \frac{18x^3 - 6x^2 - 90x + 94}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

que está definida en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

18.7. *Hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones*

a) $f_1(x) = x^2 + 1$ *en* $(1, 2)$.

b) $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$ *en* $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, $(x \neq 0)$.

c) $f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *en* $(0, 1)$, $(-1 < x < 1)$.

d) $f_4(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *en* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(-1 < x < 1)$.

Solución

a) $f'_1(x) = 2x$, y por tanto $f'_1(1) = 2$, luego la ecuación de la recta tangente viene dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

es decir

$$y - 2 = 2(x - 1) = 2x - 2$$

o bien en forma explícita

$$y = 2x.$$

b) $f'_2(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, y por tanto $f'_2(2) = -\dfrac{1}{4}$, luego la ecuación de la recta tangente viene dada por

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

o bien

$$y = -\frac{1}{4}x + 1.$$

c) $f'_3(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, y por tanto $f'_3(0) = 0$, luego la recta tangente es

$$y - 1 = 0 \cdot x = 0$$

es decir

$$y = 1.$$

d) $f'_4(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, por tanto $f'_4\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = -1,$

luego la recta tangente es

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = (-1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -x + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

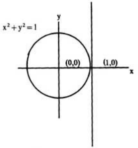
o bien

$$y = -x + \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

18.8. *Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de radio* 1 *y de centro* (0, 0) *en el punto* (1, 0).

Solución

Tenemos que encontrar una función tal que su gráfica esté contenida en la circunferencia y contenga al punto (1, 0). Obsér-



vese que no es posible encontrar un intervalo en el eje de las x de la forma $(1-\delta, 1+\delta)$ y una función $f:(1-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{R}$ en las condiciones anteriormente señaladas, pues a cada punto $1-\delta < x < 1$ le haría corresponder dos puntos.

Para resolver esta cuestión, planteamos la siguiente función en y:

$$\begin{aligned} g:(-1,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow g(y) = \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

que es derivable y $g(0)=1$, y además

$$y^2 + g(y)^2 = y^2 + (\sqrt{1-y})^2 = y^2 + 1 - y^2 = 1$$

luego su gráfica estará en la circunferencia unidad.

Hallemos ahora $g'(y)$:

$$g'(y) = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{y} \quad g'(0) = 0.$$

Luego la ecuación de la tangente será

$$x - 1 = 0(y-0) = 0$$

es decir

$$x = 1.$$

18.9. *Probar que dada una función polinómica*

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$$

la derivada (n + 1)-ésima es la función idénticamente nula.

Solución

Método directo:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3x + \cdots + (n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-2}$$
$$f'''(x) = 2\cdot 3\cdot a_3 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4x + \cdots + (n-2)(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-3}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n}(x) = [n-(n-1)]\cdots(n-2)(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-n} =$$
$$= (n-n+1)\cdots(n-2)(n-1)\cdot n\cdot a_n$$
$$f^{(n+1}(x) = 0$$

Método indirecto:

La derivada de un polinomio de grado n es un polinomio de grado $(n - 1)$, la derivada de éste será un polinomio de grado $(n - 2)$ y así sucesivamente en el paso $(n + 1)$ llegamos a la función idénticamente cero.

18.10. *Probar que $y = -x$ es tangente a la gráfica $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar el punto de tangencia y estudiar si esta tangente corta a la gráfica en algún punto distinto del punto de tangencia.*

Solución

Como la derivada de una función en un punto es la pendiente de la tangente a la gráfica de la función en el punto $(x, f(x))$, y la recta $y = -x$ tiene por pendiente -1, vamos a calcular los puntos x para los cuales $f'(x) = -1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 8 \\ 3x^2 - 12x + 8 &= -1 \\ 3x^2 - 12x + 9 &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por raíces $x = 1$ y $x = 3$.

Calculemos las rectas tangentes a la gráfica en los puntos

$$(1, f(1)) = (1, 3) \quad \text{y} \quad (3, f(3)) = (3, -3),$$

$$\begin{aligned} y - 3 &= -1(x - 1) \\ y &= -x + 4 \end{aligned}$$

luego el punto $(1, 3)$ no tiene $y = -x$ como recta tangente.

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -1(x - 3) \\ y &= -x \end{aligned}$$

luego en el punto $(3, -3)$ la recta tangente a la gráfica es $y = -x$.

Veamos si la recta $y = -x$ corta a la gráfica en algún otro punto, para ello, resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x^3 - 6x^2 + 8x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x &= x^3 - 6x^2 + 8x \\ x^3 - 6x^2 + 9x &= 0 \\ x(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ x(x - 3)(x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

luego en $x = 0$, existe otra raíz, por tanto la gráfica es cortada por $y = -x$ también en el punto $(0, 0)$.

18.11. *Dada la función $f(x) = x - x^3$, hallar la tangente a la gráfica en $(1, f(1))$. Por $(1, 0)$ pasa otra recta que es tangente a la gráfica en el punto (c, d) distinto de $(1, 0)$. Hallar el punto (c, d) y la recta tangente.*

Solución

$f'(x) = 1 - 3x^2$, luego $f'(1) = -2$, por tanto la tangente en $(1, 0)$ es

$$y - 0 = -2(x - 1)$$
$$y = -2x + 2.$$

La ecuación de la recta que es tangente a $f(x)$ en (c, d) es

$$y - d = f'(c)(x - c)$$

como esta recta pasa por $(1, 0)$ tendremos

$$-d = f'(c)(1 - c)$$
$$-d = (1 - 3c^2)(1 - c)$$

además $d = (c - c^3)$

luego

$$-(c - c^3) = (1 - 3c^2)(1 - c)$$

$$2c^3 - 3c^2 + 1 = 0$$

$$(c - 1)(2c^2 - c - 1) = 0.$$

Resolviendo $2c^2 - c - 1 = 0$ resultan las raíces $c = 1$ y $c = -\dfrac{1}{2}$.

Luego el punto (c, d) pedido es

$$d = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{3}{8}, \text{ es decir } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$$

y la ecuación de la tangente es

$$y - \left(-\frac{3}{8}\right) = \left(1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$y + \frac{3}{8} = \left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 1).$$

18.12. *Hallar la derivada n-ésima de la función*

$$h(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Solución

$$\begin{aligned}
h(x) &= (x + 1)^{-2} \\
h'(x) &= -2(x + 1)^{-2-1} = (-1)\cdot 2\cdot(x + 1)^{-3} \\
h''(x) &= (-2)(-3)(x + 1)^{-4} = (-1)^2\cdot 2\cdot 3\cdot(x + 1)^{-4} \\
h'''(x) &= (-2)(-3)(-4)(x + 1)^{-5} = (-1)^3\cdot 2\cdot 3\cdot 4(x + 1)^{-5} \\
&\vdots \\
h^{(n}(x) &= (-1)^n\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n + 1)(x + 1)^{-n-2} = \\
&= \frac{(-1)^n(n + 1)!}{(x + 1)^{n+2}} \quad ; \quad x \neq -1.
\end{aligned}$$

18.13. *Hallar la derivada n-ésima de la función*

$$h(x) = \frac{x + 2}{(x + 1)^2}.$$

Solución

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

donde $f(x) = (x + 2)$

y $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, si $x \neq -1$.

Por la fórmula de Leibnitz se tiene

$$h^{(n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k}(x) \cdot g^{(n-k}(x).$$

Tenemos que

$$f(x) = x + 2$$
$$f'(x) = 1$$
$$f''(x) = 0$$

luego al sustituir en la fórmula resulta

$$h^{(n}(x) = \binom{n}{0} f(x) \cdot g^{(n}(x) + \binom{n}{1} f'(x) \cdot g^{(n-1}(x)$$

ahora bien, por el problema anterior si $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

entonces $g^{(n}(x) = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$ y $g^{(n-1}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}n!}{(x+1)^{n+1}}$.

Por tanto

$$h^{(n}(x) = (x+2) \cdot \frac{(-1)^n(n+1)!}{(x+1)^{n+2}} + n \cdot \frac{(-1)^{n-1}n!}{(x+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} \left[n - \frac{(x+2)(n+1)}{x+1} \right].$$

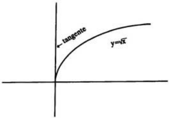
18.14. *Hallar la derivada por la derecha en el punto $x = 0$ de la función $f_1(x) = \sqrt{x}$ y $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ para $x \geqslant 0$.*

Solución

Calculemos la derivada por la derecha en 0:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f_1(0 + h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = + \infty.$$



Esto quiere decir que la recta tangente por la derecha en el punto 0, es la vertical (o de pendiente $+\infty$) $x = 0$.

Análogamente, la función $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$, se tiene que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f_2(0 + h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = + \infty$$

y la recta tangente es $x = 0$.

Nota: Se pueden estudiar las derivadas infinitas, como pendientes de rectas verticales.

18.15. *Hallar la recta tangente a la gráfica de la función* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *en* $(0, 0)$.

Solución

$$f(x) = x^{1/3}$$

luego

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

y

$$f'(0) = +\infty.$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente es infinito, luego es una recta vertical que pasa por $(0, 0)$, es decir su ecuación es $x = 0$.

18.16. *Calcular la derivada de la función* $|f(x)|$ *donde* $f(x)$ *es una función derivable en todo punto, y sólo tiene un número finito de ceros.*

Solución

Si $x \in \mathbb{R}$ es un punto tal que $f(x) > 0$, entonces existe, por la continuidad de f, $\delta > 0$ tal que en $(x - \delta, x + \delta)$ la función es positiva. Como $|f| = |\cdot| \circ f$, donde $|\cdot|$ es la función valor absoluto, se tiene que

$$|f|'(x) = |\cdot|'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \cdot f'(x).$$

Si $x \in \mathbb{R}$ es un punto tal que $f(x) < 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in (x - \delta, x + \delta)$ entonces $f(y) < 0$, luego

$$|f|'(x) = |\cdot|'(f(x)) \cdot f'(x) = -1 \cdot f'(x) = -f'(x).$$

Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = 0$, como f sólo tiene un número finito de ceros, existe un intervalo de la forma $(x - \delta, x + \delta)$ tal que para todo $y \in (x - \delta, x + \delta)$, se tiene que $f(y) \neq 0$, y sólo pueden ocurrir los siguientes casos:

a) $f(y) > 0$ si $0 < |x - y| < \delta$, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 0}{h} = f'(x).$$

b) $f(y) < 0$ si $0 < |x - y| < \delta$, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(x+h)}{h} = -f'(x).$$

c) $f(y) > 0$ si $0 < x - y < \delta$ y $f(y) < 0$ si $0 < y - x < \delta$, entonces

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|f(x+h)|}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)}{h} = f'(x)$$

y

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|f(x+h)|}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-f(x+h)}{h} = -f'(x)$$

luego la función no es derivable.

d) $f(y) < 0$ si $0 < x - y < \delta$ y $f(y) > 0$ si $0 < |y - x| < \delta$, entonces

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|f(x+h)|}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-f(x+h)}{h} = -f'(x)$$

y

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|f(x+h)|}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)}{h} = f'(x)$$

luego la función no es derivable.

18.17. *Un móvil en trayectoria rectilínea sigue la siguiente ley:*

$$e(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 5$$

donde $e(t)$ se mide en kilómetros y t en segundos.

Calcúlese la función velocidad $v(t)$ y la función aceleración. Calcúlese la velocidad y aceleración en $t = 0$ y $t = 2$.

Solución

La derivada de $e(t)$ es la función velocidad, luego

$$v(t) = e'(t) = 6t^2 - 18t + 12.$$

La derivada de $v(t)$ es la función aceleración,

$$a(t) = v'(t) = 12t - 18.$$

En los instantes $t = 0$ y $t = 2$ se tiene

$$v(0) = 12, \quad a(0) = -18 \quad \text{(está frenando)}$$

y

$$v(2) = 0, \quad a(2) = 6 \quad \text{(está parado y acelerado).}$$

19. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

INTRODUCCION

Representación gráfica de funciones

Para obtener la representación gráfica de una función $f(x)$, exponemos ordenadamente los aspectos fundamentales que debemos estudiar:

1. *Campo de definición.*

Son los valores de x para los cuales $f(x)$ está bien definida.

2. *Puntos de discontinuidad.*

Si la función no existe en x_0, o carece de límite en x_0, o aunque exista el valor de la función y exista el límite éstos son distintos, entonces en cualquiera de estos casos la función es discontinua en x_0.

3. *Simetrías.*

— Simetría respecto al eje OY cuando se verifica $f(x) = f(-x)$.

— Simetría respecto al origen cuando se verifica $f(x) = -f(-x)$.

4. *Asíntotas.*

— Asíntota paralela al eje OY o asíntota vertical será la recta $x = a$ tal que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ o $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

— Asíntota paralela al eje OX o asíntota horizontal será la recta $y = b$ tal que $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

— Asíntota oblicua será la recta $y = mx + n$ donde

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{o} \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

y

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) \quad \text{o} \quad n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx).$$

5. *Puntos de corte con los ejes coordenados.*

— Con el eje de las abscisas son los puntos $(x, 0)$ donde x es solución de la ecuación $0 = f(x)$.

— Con el eje de las ordenadas es el punto $(0, y)$ donde $y = f(0)$.

6. *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

En el caso de ser $f(x)$ derivable, el conjunto de crecimiento es $\{x : f'(x) > 0\}$ y el de decrecimiento el conjunto $\{x : f'(x) < 0\}$.

7. *Máximos y mínimos relativos.*

Los posibles extremos relativos se obtienen de la condición necesaria $f'(x) = 0$.

Si $x = a$ es solución de la ecuación $f'(x) = 0$, entonces si $f''(a) < 0$ será máximo y si $f''(a) > 0$ será mínimo.

En algunos casos, suele ser preferible el estudio de la primera derivada: si a la izquierda del punto extremo es $f'(x) > 0$ y a la derecha $f'(x) < 0$, en dicho punto existe un máximo relativo y recíprocamente si a la izquierda es $f'(x) < 0$ y a la derecha es $f'(x) > 0$, en dicho punto existe un mínimo relativo.

8. *Intervalos de concavidad y convexidad.*

Se estudia el signo de $f''(x)$. Si $f''(x) > 0$ la función es convexa y si $f''(x) < 0$ la función es cóncava.

9. *Puntos de inflexión.*

Son las posibles soluciones x_i de la ecuación $f''(x) = 0$ que verifiquen $f'''(x_i) \neq 0$.

19.1. *Hallar aplicando la regla de L'Hôpital*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

Solución

Si sustituimos $x = 1$, nos resulta la indeterminación $\frac{0}{0}$, y aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 4x}$$

de nuevo este límite es indeterminado, aplicamos nuevamente la regla

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 4x} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{12x^2 - 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

19.2. *Hallar*

$$a)\ \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{2x^2-2x-4} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} x\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+1}.$$

Solución

a) Aplicando L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{2x^2-2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)+(x-2)}{4x-2} = \frac{1}{6}.$$

b)

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{\frac{1}{x}} = L.$$

Aplicando L'Hôpital se tiene

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1/x^2}{2\sqrt{1/x+1}}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}+1}} = 0.$$

19.3. *Hallar*

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}. \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

Solución

a) Aplicamos la regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación que se nos presenta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + 0 = 0 + 0 = 0.$$

b) Aplicando L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} + 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Luego si $\alpha = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, hemos llegado a que $\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$, por tanto $\alpha = 1$.

19.4. *Decir cuál de los siguientes cálculos es erróneo y dar la equivocación cometida.*

(1) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{1}{8}.$$

(2) Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-3}{3x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{6x} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Solución

El límite calculado en (1) es correcto.

El cálculo en (2) es erróneo porque se ha aplicado la regla de L'Hôpital en el segundo límite que no presentaba indeterminación

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-3}{3x^2-4} = \frac{1}{3\cdot 4-4} = \frac{1}{8}.$$

19.5. *Determinar los máximos y los mínimos relativos y absolutos de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ *en* $[0, 5]$.

b) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ *en* $\left[\dfrac{1}{1.000}, 1.000\right]$.

c) $k(x) = |x|^3$ *en* $[-1, 1]$.

Solución

a) Hallemos primero los máximos y mínimos relativos.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$$

La ecuación $f'(x) = 0$ tiene por raíces $x = 1$ y $x = 3$. Para ver qué carácter tienen estudiemos $f''(x)$

$$f''(x) = 3(2x - 4)$$

y por tanto

$$f''(1) = -6 < 0$$
$$f''(3) = 6 > 0$$

luego en $x = 1$ hay un máximo relativo y en $x = 3$ hay un mínimo relativo, con los valores siguientes $f(1) = 5$ y $f(3) = 1$.

Como la función es derivable en todo punto, los máximos y mínimos absolutos, estarán en el conjunto $\{0, 1, 3, 5\}$. Para decidir hallemos los valores de f en $x = 0$ y $x = 5$:

$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f(5) = 21.$$

Luego el máximo absoluto lo alcanza f en $x = 5$ y los mínimos absolutos en $x = 0$ y $x = 3$.

b) La función $g(x)$ está definida y es continua en $\left[\frac{1}{1.000}, 1.000\right]$.

Veamos primero los máximos y mínimos relativos

$$g'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

la ecuación $g'(x) = 0$ tiene por raíces $x = \pm 1$, pero sólo $x = +1$ pertenece al intervalo de definición.

Para ver qué carácter tiene, estudiemos $g''(x)$

$$g''(x) = +\frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

y $g''(1) = 2 > 0$, luego en $x = 1$ hay un mínimo relativo y vale $g(1) = 2$.

Como la función es derivable en todo punto del intervalo de definición, los máximos y mínimos absolutos, estarán en el conjunto $\left\{\frac{1}{1.000}, 1, 1.000\right\}$. Para decidir hallemos los valores de f en $x = \frac{1}{1.000}$ y $x = 1.000$:

$$g\left(\frac{1}{1.000}\right) = g(10^{-3}) = \frac{(10^{-3})^2+1}{10^{-3}} = 10^3[(10^{-6})+1] = 10^{-3} + 10^3$$

$$g(1.000) = g(10^3) = \frac{(10^3)^2+1}{10^3} = 10^3 + 10^{-3}.$$

Luego los máximos absolutos los alcanza f en los extremos del intervalo, y el mínimo absoluto, que también es un mínimo relativo, lo alcanza en $x = 1$.

c)

$$k(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x^3 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

es una función que es continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular en $[-1, 1]$. Veamos si es derivable en $x = 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{k(0+h) - k(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^2 = 0$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{k(0+h) - k(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^3}{h} = \lim_{h \to 0^-} -h^2 = 0$$

luego $k(x)$ es derivable en $(-1, 1)$ y

$$k'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -3x^2 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Veamos si $k'(x)$ es derivable en $x = 0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{k'(0+h) - k'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} 3h = 0$$

y

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{k'(0+h) - k'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-3h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} -3h = 0$$

luego $k'(x)$ es derivable en $(-1, 1)$ y

$$k''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -6x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Calculemos los máximos y mínimos relativos: la ecuación $k'(x) = 0$, tiene por raíces $x = 0$, pero en este caso $k''(0) = 0$ con lo que no podemos usar el criterio del signo de la derivada segunda para averiguar si en $x = 0$ hay o no máximo o mínimo relativo.

No obstante, si $0 < |x - 0| < \delta$ entonces $k(x) > 0$, luego $k(x)$ tiene un mínimo en $x = 0$.

Los máximos y mínimos absolutos se presentarán, pues, o en $x = 1$ o en $x = -1$ o en $x = 0$. Pero $k(1) = 1$ y $k(-1) = 1$, luego el mínimo absoluto está en $x = 0$ y los máximos absolutos en los extremos del intervalo de definición.

19.6. *Hallar el valor mínimo de* $f(x) = |x| + |x - 1|$.

Solución

La expresión de la función $f(x)$ es

$$f(x) = \begin{cases} -x - (x-1) = 1 - 2x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x - (x-1) = 1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ x + (x-1) = 2x - 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

y esta función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Por ser una función polinómica en intervalos sabemos que es derivable en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Veamos si en dichos intervalos abiertos hay máximos o mínimos relativos. La expresión de $f'(x)$ en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ es

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

luego todos los puntos de $(0, 1)$ son máximos y mínimos relativos.

Por otra parte, $f(x) > 1$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, por tanto el mínimo de la función es alcanzado en todos los puntos de $(0, 1)$. Como además $f(0) = 1$ y $f(1) = 1$, el mínimo de la función es alcanzado en $[0, 1]$.

19.7. *Probar que la función polinómica*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

tal que

$$a_{2k} = 0 \quad \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{y} \quad a_{2k+1} > 0 \quad \text{si} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

tiene una única raíz real. Además es estrictamente creciente.

(Obsérvese que sobre a_0 no se da ninguna condición.)

Solución

Procedamos por reducción al absurdo, supongamos que existen $x_1 < x_2$ tal que son raíces de $f(x)$, es decir $f(x_1) = f(x_2) = 0$, como $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, por el teorema de Rolle se deduce que existe $\alpha \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Pero

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (2n+1)a_{2n+1} x^{2n} = \\ &= a_1 + 0 + 3a_3 x^2 + \cdots + (2n+1)a_{2n+1} x^{2n} > 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Lo que es contradictorio.

Además, queda probado que es creciente ya que el signo de la función $f'(x)$ es estrictamente positivo.

Para ver que es estrictamente creciente, reiteramos el razonamiento anterior: Supongamos que existen $y_1 < y_2$ tal que $f(y_1) = f(y_2)$ y consideremos la función $g(x) = f(x) - f(y_1)$. Esta función verifica las condiciones de la primera parte, que nos lleva a una contradicción, por tanto $f(y_1) < f(y_2)$.

19.8. *Hallar el radio de la base de un recipiente cónico de generatriz 2 cm para que su capacidad sea máxima.*

Solución

Si denotamos por r el radio de la base, g la generatriz del cono y h la altura sabemos que $g^2 = h^2 + r^2$ de donde

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{4 - r^2}.$$

Por otra parte, la función capacidad de dicho cono en función del radio de la base es:

$$c(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{4 - r^2}$$

hallemos el máximo,

$$c'(r) = \frac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{4 - r^2} + \frac{(-2r)\cdot r^2}{2\sqrt{4 - r^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r\left(2\sqrt{4 - r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r\left(\frac{2(4 - r^2) - r^2}{\sqrt{4 - r^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r\left(\frac{8 - 3r^2}{\sqrt{4 - r^2}}\right)$$

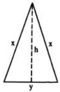
la ecuación $c'(r) = 0$ se cumple si $r = 0$ (hipótesis descartada pues el radio de la base no puede ser cero en un recipiente) o si $8 - 3r^2 = 0$, de donde $r = \sqrt{8/3}$.

Veamos si este punto es máximo, como el cálculo de la segunda derivada sería largo, estudiemos el signo de la primera derivada, si $0 < h < \sqrt{8/3}$, $c'(h) > 0$, luego $c(r)$ es creciente a la izquierda del punto $r = \sqrt{8/3}$ y si $h > \sqrt{8/3}$, $c'(h) < 0$, luego $c(r)$ es decreciente a la derecha de $r = \sqrt{8/3}$, por tanto la función tiene un máximo cuando el radio es $\sqrt{8/3}$ cm.

19.9. *Hallar los lados del triángulo isósceles de perímetro* 1 *que tiene área máxima.*

Solución

Denotemos por x la longitud de los lados iguales del triángulo y por y la longitud del otro lado.



Se tiene $2x + y = 1$, por tanto $y = 1 - 2x$.

La altura del triángulo es

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{1 - 2x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x - 1}{4}}.$$

El área del triángulo en función de x, será

$$A(x) = \frac{1}{2} y \cdot h = \frac{1}{2}(1 - 2x)\sqrt{\frac{4x - 1}{4}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - x\right)\sqrt{x - \frac{1}{4}}.$$

Calculemos la derivada de $A(x)$

$$A'(x) = (-1)\sqrt{x - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2} - x}{2\sqrt{x - \frac{1}{4}}} = \frac{(-2)\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - x}{2\sqrt{x - \frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{-2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - x}{2\sqrt{x - \frac{1}{4}}} = \frac{-3x + 1}{2\sqrt{x - \frac{1}{4}}}.$$

La ecuación $A'(x) = 0$, tiene por raíz $x = \frac{1}{3}$.

Comprobemos que es un máximo:

$$A''(x) = \frac{(-3)\left(2\sqrt{x - \frac{1}{4}}\right) - (-3x + 1)\left(\frac{2}{2\sqrt{x - \frac{1}{4}}}\right)}{4\left(x - \frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{(-6)\left(x - \frac{1}{4}\right) + 3x - 1}{4\left(x - \frac{1}{4}\right)\sqrt{x - \frac{1}{4}}} = \frac{-3x + \frac{1}{2}}{4\left(x - \frac{1}{4}\right)^{3/2}}$$

veamos el signo de $A''(x)$ para $x = \dfrac{1}{3}$

$$A''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-3 \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}}{4\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)^{3/2}} < 0$$

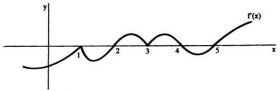
luego en $x = \dfrac{1}{3}$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones de los lados son

$$x = \frac{1}{3},\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

es decir, el triángulo es equilátero.

19.10. *La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de una función $f(x)$, hallar los puntos máximos y mínimos locales de f.*



Solución

Los puntos en los que $f(x)$ tiene máximos y mínimos locales tienen que cumplir que $f'(x) = 0$, por tanto, sólo pueden ser los del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

En $x = 1$, por la izquierda y por la derecha la derivada es negativa, luego la función es decreciente en un entorno de $x = 1$, luego no hay máximo ni mínimo.

En $x = 2$, por la izquierda es negativa, luego la función $f(x)$ es decreciente y por la derecha es positiva, luego la función es creciente; por tanto hay un mínimo relativo.

En $x = 3$, la situación es análoga a $x = 1$ salvo que la función es creciente pues $f'(x) > 0$ en un entorno reducido de $x = 3$.

En $x = 4$, por la izquierda la función es creciente y por la derecha decreciente, luego hay un máximo relativo.

En $x = 5$, se repite el caso de $x = 2$.

19.11. *Dada la función $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$, explicar por qué no contradice al teorema de Rolle aunque $f(1) = f(-1) = 0$ y la derivada no se anula en ningún punto interior de $[-1, 1]$.*

Solución

En $x \in (-1, 1) - \{0\}$ la derivada es

$$f'(x) = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$$

que no es nunca cero. Veamos en $x = 0$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 - \sqrt[5]{h^4} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} -(h^{4/5} \cdot h^{-1}) = \lim_{h \to 0^-} -h^{-1/5} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{1}{\sqrt[5]{h}} =$$

$$= \lim_{h' \to 0^+} -\frac{1}{\sqrt[5]{-h'}} = \lim_{h' \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{h'}} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-\sqrt[5]{h^4}-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} -\frac{1}{\sqrt[5]{h}} = -\infty$$

y por tanto no es derivable la función en $x = 0$.

19.12. *Comprobar que la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los segmentos $-1 \leqslant x \leqslant 0$ y $0 \leqslant x \leqslant 1$. Hallar los valores correspondientes de c.*

Solución

La función polinómica $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, también lo es en $[-1, 0]$ y $[0, 1]$.

Además $f(1) = f(-1) = f(0) = 0$ y $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, luego también en $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ y por el teorema de Rolle existe $c_1 \in (0, 1)$ y $c_2 \in (-1, 0)$ tales que

$$f'(c_1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(c_2) = 0.$$

Calculemos c_1 y c_2,

$$f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$$

luego $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ son los puntos que el teorema de Rolle asegura.

19.13. *Sea f una función continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$ tal que $f(x), f'(x) \in (0, 1)$ para todo $x \in [0, 1]$. Probar que existe un único $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Solución

Consideramos la función $g(x) = f(x) - x$ que es continua en $[0, 1]$ por ser diferencia de funciones continuas. Además

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0 \quad \text{pues} \quad f(0) \in (0, 1)$$

y

$$g(1) = f(1) - 1 < 0 \quad \text{pues} \quad f(1) \in (0, 1)$$

por el teorema de Bolzano existe al menos $x_0 \in (0, 1)$ tal que $g(x_0) = 0$, es decir $f(x_0) - x_0 = 0$, luego $f(x_0) = x_0$.

Supongamos que existieran $x_0, x_1 \in (0, 1)$ tales que

$$f(x_0) = x_0 \quad \text{y} \quad f(x_1) = x_1$$

y $x_0 < x_1$ (si $x_1 < x_0$ se hace análogamente), por el teorema del valor medio existiría $c \in (x_0, x_1) \subset (0, 1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1$$

contradicción pues por hipótesis $f'(c) \in (0, 1)$ y por tanto $f'(c) < 1$.

19.14. *Comprobar las siguientes proposiciones:*

a) *Sea $f(x)$ una función derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$, tal que $f'(x) \geqslant M$ entonces*

$$f(b) \geqslant M(b - a) + f(a).$$

b) *Si $f'(x) \leqslant m$ entonces*

$$f(b) \leqslant m(b - a) + f(a).$$

Solución

Por el teorema del valor medio, existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

luego

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant M$$

y por tanto

$$f(b) \geqslant M(b - a) + f(a).$$

La parte b) se hace de la misma forma, entonces

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant m$$

y

$$f(b) \leqslant m(b - a) + f(a).$$

19.15. *El concepto de máximo y mínimo relativo no está necesariamente ligado a la derivabilidad de la función (aunque ésta es un instrumento realmente útil en su estudio.) Ni siquiera la continuidad es precisa. Para remarcar este hecho, estúdiense los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones*

a)

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{si } x = \dfrac{1}{n} \text{ con } n \text{ natural y } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\[2ex] 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ y no es de la forma } \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, 1] \text{ y es racional} \\ 0 & si \quad x \in [0, 1] \text{ y es irracional.} \end{cases}$$

(Tanto $f(x)$ como $g(x)$ tienen puntos de discontinuidad.)

Solución

a) La función $f(x)$ alcanza los máximos relativos en los puntos $x = \frac{1}{n}$. En efecto, dado $x = \frac{1}{n}$ se tiene que

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$$

luego

$$\frac{1}{n} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$$

además $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ y para todo $x_0 \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$ es $f(x_0) = 0$,

luego

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant f(x),$$

luego $\frac{1}{n}$ es un máximo relativo.

Los mínimos relativos se alcanzan en los puntos $x \in [0, 1]$ y $x \neq \frac{1}{n}$. En efecto, dado un $x_1 \in [0, 1]$ y $x_1 \neq \frac{1}{n}$, es $f(x_1) = 0$, entonces para todo $y \in [0, 1]$ se tiene que y puede ser de la forma $y = \frac{1}{n}$ con lo cual $f(y) = n \geqslant 0$, o bien $y \neq \frac{1}{n}$ con lo cual $f(y) = 0 \geqslant 0$, por tanto $f(x_1) \leqslant f(y)$ para todo $y \in [0, 1]$, luego x_1 es un mínimo relativo.

b) La función $g(x)$ alcanza los máximos relativos en todo punto tal que $g(x) = 1$ y alcanza los mínimos relativos en todo punto tal que $g(x) = 0$. En efecto, dado un $x_0 \in [0, 1]$ tal que $g(x_0) = 1$ se tiene que para todo $x \in [0, 1]$, puede ocurrir que x sea racional con lo que $g(x) = 1 \leqslant g(x_0)$ o que x sea irracional con lo que $g(x) = 0 \leqslant g(x_0)$, luego para todo $x \in [0, 1]$ es $g(x) \leqslant g(x_0)$, por tanto x_0 es un máximo relativo.

Estudiemos los mínimos relativos: dado un $x_1 \in [0, 1]$ tal que $g(x_1) = 0$ se tiene que para todo $x \in [0, 1]$, puede ocurrir que x sea racional con lo que $g(x_1) \leqslant g(x) = 1$ o bien que x sea irracional con lo que $g(x_1) \leqslant g(x) = 0$ luego para todo $x \in [0, 1]$ es $g(x_1) \leqslant g(x)$, por tanto x_1 es un mínimo relativo.

19.16. *Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de la función*

$$f(x) = 3x^5 - 20x^4 + 30x^3 + 3.$$

Solución

Hallamos la segunda derivada.

$$f(x) = 3x^5 - 20x^4 + 30x^3 + 3$$
$$f'(x) = 15x^4 - 80x^3 + 90x^2$$
$$f''(x) = 60x^3 - 240x^2 + 180x = 60x(x - 3)(x - 1).$$

La ecuación $f''(x) = 0$ tiene por raíces $x = 0$, $x = 3$ y $x = 1$.

Tenemos que ver el signo de $f''(x)$:

Si $x < 0$ la función $f''(x) < 0$, luego $f(x)$ es cóncava.

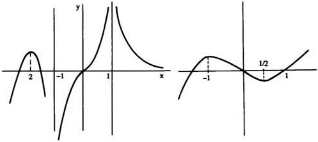
Si $0 < x < 1$ la función $f''(x) > 0$, luego $f(x)$ es convexa.

Si $1 < x < 3$ la función $f''(x) < 0$, luego $f(x)$ es cóncava.

Si $3 < x$ la función $f''(x) > 0$, luego $f(x)$ es convexa.

Los puntos de inflexión son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

19.17. *Conocidos los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, especifíquese 1.°) el signo de la derivada y 2.°) los intervalos de convexidad y concavidad.*



Solución

1.°) a) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (-1, 1)$ pues $f(x)$ es creciente.

$f'(x) < 0$ en $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$ pues $f(x)$ es decreciente.

$g'(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ pues $g(x)$ es creciente.

$g'(x) < 0$ en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ pues $g(x)$ es decreciente.

2.°) a) En $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ la función es cóncava pues su gráfica queda por debajo de la tangente en cada punto $(x, f(x))$ de la gráfica.

En $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$ la función $f(x)$ es convexa pues su gráfica queda por encima de la tangente en cada punto $(x, f(x))$ de la gráfica.

b) En $(-\infty, 0)$ la función es cóncava y en $(0, +\infty)$ la función es convexa.

19.18. *La derivada de la función $f(x)$ es*

$$f'(x) = x^2 - 4x.$$

a) ¿En qué intervalos es creciente? ¿Decreciente?

b) ¿Dónde es cóncava y convexa?

c) Hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión.

Solución

a) $f'(x) = x^2 - 4x = x(x - 4)$.

Si $x < 0$, $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

Si $0 < x < 4$, $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x > 4$, $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

b) $f''(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$.

Si $x < 2$, $f''(x) < 0$, luego $f(x)$ es cóncava.

Si $x > 2$, $f''(x) > 0$, luego $f(x)$ es convexa.

c) $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y $x = 4$, por el apartado a) se puede asegurar que $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 4$.

$f''(x) = 0$ en $x = 2$. Luego éste es un punto de inflexión pues la curva pasa de cóncava a convexa.

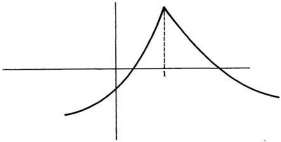
19.19. *Hágase un posible gráfico de una función $f(x)$ tal que*

1.°) $f'(x) > 0$ *si* $x < 1.$

2.°) $f'(x) < 0$ *si* $x > 1.$

3.°) $f''(x) > 0$ *si* $x \neq 1.$

Solución



Pues en $x < 1$ la función $f(x)$ es creciente y en $x > 1$ es decreciente y además es convexa en todo punto distinto de $x = 1$.

19.20. *Hallar máximos y mínimos, absolutos y relativos, intervalos de concavidad y convexidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función*

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 1 & si \quad x \leqslant -2 \\ (x+2) & si \quad -2 < x \leqslant 1 \\ (x-1)^2 + 3 & si \quad 1 \leqslant x. \end{cases}$$

Hacer un diagrama de la función.

Solución

La función es continua en todo punto y derivable en

$$(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty).$$

En $x = -2$,

$$f'_-(-2) = \lim_{x \to -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \lim_{x \to -2^-} \frac{[-(x+3)^2 + 1] - 0}{x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to -2^-} -2(x + 3) = -2$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \to -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{x + 2}{x + 2} = 1.$$

En $x = 1$,

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x + 2) - 3}{(x - 1)} = 1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)^2 + 3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} x - 1 = 0.$$

Por tanto, la expresión de la función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x + 3) & \text{si} \quad x < -2 \\ 1 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 2(x - 1) & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

y la expresión de la función $f''(x)$ es

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Luego en $(-\infty, -2)$ la función es cóncava, en $(1, +\infty)$ es convexa y en $(-2, 1)$ es simultáneamente cóncava y convexa (es una recta).

Veamos los ceros de $f'(x)$: en $x = -3$, la función puede tener máximo o mínimo relativo. Como $f''(-3) = -2 < 0$, hay un máximo relativo.

Además hay que estudiar $x = -2$ y $x = 1$, pues en estos puntos la función $f(x)$ no es derivable y no nos sirve el criterio $f'(x) = 0$.

En $x = -2$, la función $f(x)$ se anula. Pero en un entorno de dicho punto, por ejemplo $(-3, -1)$ la función es estrictamente positiva, luego la función tiene un mínimo relativo.

En $x = 1$, la función $f(x)$ toma el valor 3, pero si

$$y \in (0, 1) \quad \text{es} \quad f(y) = y + 2 < 3$$

y si

$$y \in (1, 2) \quad \text{es} \quad f(y) = (y - 1)^2 + 3 > 3,$$

luego no hay máximo ni mínimo relativo.

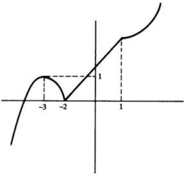
Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de $f'(x)$

$$\operatorname{sig} f'(x) = \begin{cases} \text{positivo} & \text{si} \quad x < -3 \\ \text{negativo} & \text{si} \quad -3 < x < -2 \\ \text{positivo} & \text{si} \quad -2 < x \end{cases}$$

Por tanto, $f(x)$ crece en el intervalo $(-\infty, -3)$ y en el intervalo $(-2, +\infty)$ y $f(x)$ decrece en $(-3, -2)$.

Máximos y mínimos absolutos no hay, pues

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$



19.21. *Estudiar y representar gráficamente la función* $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Solución

1. *Campo de existencia.*

La función está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. *Puntos de discontinuidad.*

La función es continua en todo punto.

3. *Simetrías.*

La función presenta simetría respecto al eje OY pues

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

y

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2.$$

No presenta simetría respecto al origen.

4. *Asíntotas.*

Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

no hay asíntotas oblicuas.

Como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

no hay asíntotas horizontales.

Por último, $\lim_{x\to a} f(x) \neq \pm\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$, por tanto no hay asíntotas verticales.

5. *Puntos de corte con los ejes.*

Con el eje $OY: f(0) = 0$, luego la gráfica corta a OY en $(0, 0)$.

Con el eje OX: la ecuación $x^4 - 2x^2 = 0$ tiene como soluciones

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad x_3 = -\sqrt{2},$$

luego la gráfica corta a OX en $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.

6. *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1).$$

La ecuación $f'(x) = 0$ tiene por soluciones

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \quad \text{y} \quad x_3 = -1.$$

Si $x \in (-\infty, -1)$ es $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x \in (-1, 0)$ es $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

Si $x \in (0, 1)$ es $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x \in (1, +\infty)$ es $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

7. *Máximos y mínimos relativos.*

Como $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$ son soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, éstos serán los posibles máximos o mínimos.

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$f''(0) = -4 < 0$, luego existe un máximo

$f''(1) = 8 > 0$, luego existe un mínimo

$f''(-1) = 8 > 0$, luego existe un mínimo.

Como $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ y $f(-1) = -1$ resulta que el punto $(0, 0)$ es un máximo relativo y los puntos $(1, -1)$ y $(-1, -1)$ son mínimos relativos.

8. *Intervalos de concavidad y convexidad.*

La ecuación $f''(x) = 0$ tiene por soluciones

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Si $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ es $f''(x) > 0$, luego $f(x)$ es convexa

Si $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ es $f''(x) < 0$, luego $f(x)$ es cóncava.

Si $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ es $f''(x) > 0$, luego $f(x)$ es convexa.

9. *Puntos de inflexión.*

Hemos visto que $f''(x) = 0$ si $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Calculemos $f'''(x)$ y veamos su valor para $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

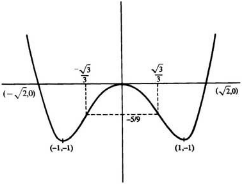
$$f'''(x) = 24x$$

como $f'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 8\sqrt{3} \neq 0$ y $f'''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -8\sqrt{3} \neq 0$ resulta que tenemos dos puntos de inflexión.

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{5}{9} \quad \text{y} \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{5}{9}.$$

Por tanto los puntos de inflexión son

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right).$$



19.22. *Estudiar y representar gráficamente la función*

$$y = (x-1)(x-1)(x+2).$$

Solución

1. *Campo de definición.*

La función está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. *Puntos de discontinuidad.*

La función es continua en todo punto, por ser una función polinómica.

3. *Simetrías.*

Esta función no presenta ningún tipo de simetría pues, por ejemplo,

$$f(2) \neq f(-2)$$

y

$$f(2) \neq -f(-2)$$

4. *Asíntotas.*

Como $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

no hay asíntotas oblicuas.

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

no hay asíntotas horizontales.

Por último, como $\lim_{x \to a} f(x) \neq \pm\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$, no hay asíntotas verticales.

5. *Puntos de corte con los ejes.*

Con el eje OX, la solución de $0 = (x-1)(x-1)(x+2)$ es $x = 1$ y $x = -2$, luego los puntos pedidos son $(1, 0)$ y $(-2, 0)$.

Con el eje OY, como $y = 2$ si $x = 0$, entonces el punto de corte con OY es $(0, 2)$.

6. *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

$$f(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Por tanto, $f'(x) = 0$ tiene por soluciones $x = \pm 1$.

Si $x \in (-\infty, -1)$ es $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

Si $x \in (-1, 1)$ es $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x \in (1, +\infty)$ es $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

7. *Máximos y mínimos relativos.*

Los posibles máximos o mínimos serán $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ por ser estos valores solución de la ecuación $f'(x) = 0$.

Como $f''(x) = 6x$, resulta que

$$f''(1) = 6 > 0, \quad \text{luego existe un mínimo}$$

y

$$f''(-1) = -6 < 0, \quad \text{luego existe un máximo.}$$

El mínimo relativo será $(1, 0)$ pues

$$f(1) = (1 - 1)(1 - 1)(1 + 2) = 0.$$

El máximo relativo será $(-1, 4)$ pues

$$f(-1) = (-1 - 1)(-1 - 1)(-1 + 2) = 4.$$

8. *Intervalos de concavidad y convexidad.*

La solución de la ecuación $f''(x) = 0$ es $x = 0$, entonces

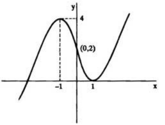
si $x \in (-\infty, 0)$ es $f''(x) < 0$ luego $f(x)$ es cóncava

si $x \in (0, +\infty)$ es $f''(x) > 0$ luego $f(x)$ es convexa.

9. *Puntos de inflexión.*

Hemos visto que $f''(x) = 0$ si $x = 0$, como $f'''(x) = 6 \neq 0$ para todo x, resulta que en $x = 0$ tenemos un punto de inflexión.

$f(0) = 2$, luego $(0, 2)$ es el punto de inflexión.



19.23. *Estudiar y representar gráficamente la función*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}.$$

Solución

1. *Campo de existencia.*

La función no existe en los puntos donde se anula el denominador, o sea en $x = 1$ y $x = 3$. Por tanto, el campo de existencia es

$$(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty).$$

2. *Puntos de discontinuidad.*

La función será continua en todo punto que no anule el denominador. Luego la función es discontinua en $x = 1$ y $x = 3$.

3. *Simetrías.*

La función no presenta ningún tipo de simetría pues, por ejemplo,

$$f(2) \neq f(-2)$$

y

$$f(2) \neq -f(-2).$$

4. *Asíntotas.*

Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$

y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

resulta que $x = 1$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \quad$ y $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

se tiene que $y = 1$ es asíntota en el $+\infty$ y en el $-\infty$.

5. *Intersección con los ejes.*

La ecuación $0 = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ tiene por solución el punto $x = 0$, luego el punto de corte es $(0, 0)$, y salvo en dicho punto, la gráfica no corta a OX pues si $x \neq 0$ entonces $y \neq 0$.

6. *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4x+3)-x^2(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}.$$

La ecuación $f'(x) = 0$, tiene por soluciones $x = 0$ y $x = \dfrac{3}{2}$. Como hemos visto que la función es discontinua en $x = 1$ y $x = 3$, estudiaremos el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos:

Si $x \in (-\infty, 0)$ es $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x \in (0, 1)$ es $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

Si $x \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ es $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

Si $x \in \left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$ es $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x \in (3, +\infty)$ es $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

7. *Máximos y mínimos relativos.*

Sabemos que $f'(x) = 0$ para $x = 0$ y $x = \dfrac{3}{2}$.

Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) =$$

$$= \frac{(-8x+6)(x^2-4x+3)^2-2(x^2-4x+3)(2x-4)(-4x^2+6x)}{(x^2-4x+3)^4} =$$

$$= \frac{(-8x+6)(x^2-4x+3)-(4x-8)(-4x^2+6x)}{(x^2-4x+3)^3}.$$

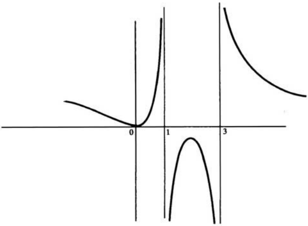
Veamos el valor de $f''(x)$ para $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$:

$f''(0) > 0$, luego existe un mínimo relativo.

$f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, luego existe un máximo relativo.

Como $f(0) = 0$, $(0, 0)$ es el mínimo relativo.

Como $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3$, $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ es el máximo relativo.



20. LA INTEGRAL DE RIEMANN

20.1. *En el intervalo* $[0, 1]$ *se tienen las siguientes particiones:*

a) $P_1 = \{0 = x_0 < x_1 = 1\}$.

b) $P_2 = \left\{0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{4} < x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = 1\right\}$.

c) $P_3 = \left\{0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{8} < x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = \frac{2}{3} < x_4 = 1\right\}$.

Ordenarlas de menos a más fina, si es posible. Dar la expresión de una partición más fina que P_1, P_2 *y* P_3.

Solución

Es claro que $P_1 \subset P_2$ y $P_1 \subset P_3$.

Pero $P_2 \not\subset P_3$ ya que $\frac{1}{4} \in P_2$ y $\frac{1}{4} \notin P_3$.

Y $P_3 \not\subset P_2$ pues $\frac{1}{8} \in P_3$ y $\frac{1}{8} \notin P_2$.

Construyamos una partición más fina:

$$P_4 = \left\{0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{8} < x_2 = \frac{1}{4} < x_3 = \frac{1}{2} < x_4 = \frac{2}{3} < x_5 = 1\right\}.$$

20.2. *Dar la expresión de la suma inferior y superior de la función* $f(x) = x^3$ *si* $x \in [0, 1]$ *y* $P = \left\{0 < \frac{1}{10} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1\right\}$

Solución

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

donde

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

luego

$$L(f, P) = 0\left(\frac{1}{10} - 0\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \frac{4}{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{4}{10^4} + \frac{1}{48} + \frac{8}{81} = \frac{4.665.552}{38.880.000}$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

donde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

luego

$$U(f, P) = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{10} - 0\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) +$$

$$+ \left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + 1^3\left(1 - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{4}{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{10^4} + \frac{1}{20} + \frac{4}{81} + \frac{1}{3} = \frac{21.034.860}{48.600.000}.$$

20.3. *Calcular* $\int_0^1 f(x)\,dx$ *por un método directo, siendo* $f(x) = x$.

Solución

La función es continua en $[0, 1]$ por lo que es integrable, entonces para calcular la integral será suficiente hallar

$$\sup L(f, P)$$

donde P recorre todas las particiones de $[0, 1]$.

Sea $P = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1\right\}$ y calculemos

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right),$$

donde

$$M_i = \sup\left\{f(t) : t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right\},$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Por una parte, tomando n suficientemente grande $U(f, P)$ se aproxima a $\frac{1}{2}$, luego como $U(f, P) \geqslant L(f, P)$ para todo P partición de $[0, 1]$ se tiene que

$$\frac{1}{2} \geqslant L(f, P)$$

y por tanto

$$\frac{1}{2} \geqslant \sup_P L(f, P).$$

Si calculamos $L(f, P)$ con la partición

$$\left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\},$$

como

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)$$

donde

$$m_i = \inf\{f(t) : t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

se tiene que

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2} = 0 + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

y para n suficientemente grande $L(f, P)$ se aproxima a $\frac{1}{2}$, luego

$$\int_0^1 x\, dx = \sup_P L(f, P) = \frac{1}{2}.$$

20.4. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua salvo en un punto $x_0\in(a,b)$ en el cual existen $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y son acotados. Probar que f es integrable en $[a,b]$ y que*

$$\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f.$$

Solución

$f:[a,x_0]\to\mathbb{R}$ es continua, así como $f:[x_0,b]\to\mathbb{R}$. Para ver que es integrable utilizaremos la condición de integrabilidad de Riemann.

Sea $\varepsilon>0$, existe $P_1=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_k=x_0\}$ tal que

$$U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{2}$$

por la integrabilidad de f en $[a,x_0]$.

Análogamente existe $P_2=\{x_0=z_0<z_1<\cdots<z_n=b\}$ tal que

$$U(f,P_2)-L(f,P_2)<\frac{\varepsilon}{2}$$

por la integrabilidad de f en $[x_0,b]$.

Consideremos la siguiente partición en $[a,b]$,

$$P_3=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_k=x_0<z_1<\cdots<z_n=b\},$$

es claro que

$$U(f,P_3)=U(f,P_1)+U(f,P_2)$$

y

$$L(f,P_3)=L(f,P_1)+L(f,P_2)$$

y se tiene

$$U(f, P_3) - L(f, P_3) = U(f, P_1) - L(f, P_1) + U(f, P_2) -$$
$$- L(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

luego f es integrable en $[a, b]$.

Para ver que $\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f$, tenemos que probar que el segundo miembro coincide con $\sup_P L(f, P)$ donde P recorre las particiones de $[a, b]$.

Veamos primero que $\int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f$ es cota superior de $\{L(f, P) : P$ partición de $[a, b]\}$.

Sea P partición de $[a, b]$,

$$P = \{a = z_0 < z_1 < \cdots < z_k < z_{k+1} < \cdots < z_n = b\}$$

y supongamos que $z_k \leqslant x_0 < z_{k+1}$. Construimos la partición

$$P^* = P \cup \{x_0\} = \{a = z_0 < z_1 < \cdots < z_k \leqslant x_0 < z_{k+1} < \cdots < z_n = b\},$$

Consideramos

$$P_1^* = \{a = z_0 < z_1 < \cdots < z_k \leqslant x_0\}$$

y

$$P_2^* = \{x_0 < z_{k+1} < \cdots < z_n = b\}$$

es evidente que

$$L(f, P^*) \leqslant L(f, P_1^*) + L(f, P_2^*)$$

luego

$$L(f,P) \leqslant L(f,P^*) \leqslant L(f,P_1^*) + L(f,P_2^*) \leqslant \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f.$$

Comprobemos finalmente que

$$\int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f = \sup_P \{L(f,P)\}.$$

Sea $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe P_1 partición de $[a, x_0]$ y P_2 partición de $[x_0, b]$ tal que

$$\int_a^{x_0} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_1)$$

y

$$\int_{x_0}^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_2).$$

Si consideramos la partición P en $[a,b]$ obtenida al unir los puntos P_1 y P_2 se tiene

$$\int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f < L(f,P_1) + L(f,P_2) + \varepsilon = L(f,P) + \varepsilon.$$

Por tanto

$$\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f.$$

Nota: Obsérvese que análogamente al enunciado, podría haberse considerado una función continua salvo un número finito de puntos de discontinuidad con límites por la derecha y por la izquierda.

20.5. *Sea $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2k+1 & si \quad x \in \left(\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right] \quad k=0,1,\dots,n-1 \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Calcúlese $\displaystyle\int_0^1 f$.

Solución

Esta función es una función continua salvo en un número finito de puntos, luego estamos en las condiciones del problema 20.4, por tanto la función es integrable y

$$\int_0^1 f = \int_0^{1/n} f + \int_{1/n}^{2/n} f + \cdots + \int_{(n-1)/n}^1 f =$$

$$= \int_0^{1/n} 1 + \int_{1/n}^{2/n} (2\cdot 1 + 1) + \cdots + \int_{(n-1)/n}^1 2(n-1) + 1 =$$

$$= \int_0^{1/n} 1 + \int_{1/n}^{2/n} 3 + \cdots + \int_{(n-1)/n}^1 (2n-1) =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{n} + 3\cdot\frac{1}{n} + \cdots + (2n-1)\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}[1 + 3 + \cdots + (2n-1)] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}\cdot n\cdot(2n-1+1)\right] = n.$$

20.6. *Usando el segundo teorema fundamental del cálculo, hállense:*

a) $\int_0^1 x\,dx.$ *c)* $\int_0^5 (x^2 + 3x + 2)\,dx.$

b) $\int_0^1 x^2\,dx.$ *d)* $\int_{-1}^7 (x^4 + x)\,dx.$

Solución

a) La función $f(x) = x$ es la derivada de la función $g(x) = \frac{x^2}{2}$, por tanto

$$\int_0^1 x\,dx = g(1) - g(0) = \frac{1}{2}.$$

b) La función $f(x) = x^2$ es la derivada de la función $g(x) = \frac{x^3}{3}$, por tanto

$$\int_0^1 x^2\,dx = g(1) - g(0) = \frac{1}{3}.$$

c) Obsérvese que la función $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x$ tiene por derivada la función integrando, luego

$$\int_0^5 (x^2 + 3x + 2)\,dx = g(5) - g(0) = \frac{125}{3} + 3\cdot\frac{25}{2} + 10 =$$

$$= \frac{250 + 225 + 60}{6} = \frac{535}{6}.$$

d) La función $g(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^2}{2}$ cumple $g'(x) = x^4 + x$, luego

$$\int_{-1}^{7} (x^4 + x)\,dx = g(7) - g(1) =$$

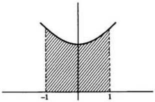
$$= \frac{16.807}{5} + \frac{49}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{33.856}{10}.$$

Nota: Obsérvese que $\int_0^1 x \cdot \int_0^1 x \neq \int_0^1 x^2$, lo que prueba que $\int_a^b f \cdot g$ no es, en general, igual a $\int_a^b f \cdot \int_a^b g$.

20.7. *Hallar el área del siguiente conjunto*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 1\}.$$

Solución



Area $(A) = \int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\,dx$, por el segundo teorema fundamental del cálculo, y como $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$ es una función tal que $g'(x) = f(x)$, entonces se tiene que

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\,dx = g(1) - g(-1) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{-1}{3} + (-1)\right) = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

20.8. *Sea la función $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$. Calcúlese $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx$. Dar una interpretación del valor de dicha integral, en función del área del conjunto, que delimita la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas.*

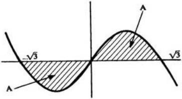
Solución

Sea $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12}$ una función polinómica tal que $g'(x) = f(x)$, entonces

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^3}{3}\right) dx = g(+\sqrt{3}) - g(-\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2}{2} - \frac{(\sqrt{3})^4}{12} - \frac{(-\sqrt{3})^2}{2} + \frac{(-\sqrt{3})^4}{12} = 0.$$

Para interpretar este resultado, veamos cómo es la función $f(x)$:



Corta el eje de abscisas en $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$, tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = -1$, y es impar, es decir $f(x) = f(-x)$.

La integral $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx$ vale cero pues se suman las áreas con signo positivo si están por encima del eje de abscisas y las áreas de signo negativo si están por debajo del eje de abscisas, en este caso por ser la función impar el área positiva es igual al área negativa.

20.9. *Sea la función* $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$. *Calcúlese* $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx$. *Interprétese de forma análoga al problema* 20.8.

Solución

Si $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12}$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = g(\sqrt{3}) - g(-1) =$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2}{2} - \frac{(\sqrt{3})^4}{12} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = 1 - \frac{8}{12} = \frac{1}{3}.$$

En este caso el área positiva es mayor que el área «negativa».

20.10. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función tal que* $f(x) > c \geqslant 0$ *para todo* $x \in [a, b]$. *Probar que*

$$\int_a^b f(x)\,dx > c(b - a).$$

Solución

Sea P_1 la partición $\{x_0 = a < b < x_1\}$, entonces

$$L(f, P_1) = \min\{f(t) : t \in [a, b]\} \cdot (b - a) > c \cdot (b - a).$$

Pero

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\} \geqslant$$
$$\geqslant L(f, P_1) > c \cdot (b - a).$$

20.11. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \in [a, b]$. Probar:*

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$

b) *Si* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ *entonces* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in [a, b]$.

Solución

a) Como f es integrable se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ particiones de } [a, b]\},$$

pero con las notaciones usuales,

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

donde

$$m_i = \inf\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]\} \geqslant 0.$$

Por tanto, $L(f, P) \geqslant 0$ para toda P y

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

b) Supongamos que $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$ (para simplificar la notación suponemos $x_0 \in (a, b)$ aunque el método sería el mismo si $x_0 = a$ ó $x_0 = b$).

Por ser f continua dado $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y - x_0| <$ $< \delta$ entonces

$$|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

Dado $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ es

$$f(y) > \frac{f(x_0)}{2} > 0, \quad \text{en efecto:}$$

supongamos que fuese $f(y) \leqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$ entonces

$$f(x_0) = |f(x_0)| = |f(x_0) - f(y) + f(y)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x_0) - f(y)| + |f(y)| <$$

$$< \frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0)$$

luego $f(x_0) < f(x_0)$, absurdo.

Por tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx > \frac{f(x_0)}{2}\cdot 2\delta > 0,$$

ya que por el apartado *a*) tenemos que

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

y por el resultado del problema 20.10.

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx > \frac{f(x_0)}{2}\cdot 2\delta.$$

20.12. *Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones*

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt.$ *b)* $g(x) = \displaystyle\int_x^7 \frac{dt}{1+t^2}.$

c) $h(x) = \displaystyle\int_0^{x^2+1} t^2\,dt.$ *d)* $k(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x^2+1} t^2\,dt.$

Solución

a) Por el teorema fundamental del cálculo

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

b) $g(x) = -\int_7^x \frac{dt}{1+t^2}$, y por el primer teorema fundamental del cálculo se tiene

$$g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

c) $h(x) = h_1 \circ h_2(x)$ donde $h_1(x) = \int_0^x t^2\,dt$ y $h_2(x) = x^2 + 1$, por la regla de la cadena

$$h'(x) = h_1'(h_2(x)) \cdot h_2'(x) = (x^2+1)^2 \cdot 2x.$$

d) $$k(x) = \int_0^{x^2+1} t^2\,dt + \int_{-1}^0 t^2\,dt,$$

entonces por *c*)

$$k'(x) = (x^2+1)^2 \cdot 2x + 0.$$

20.13. *Calcúlese* $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x x\,f(t)\,dt$.

Solución

Claramente, como se integra en t, la x puede salir de la integral, resultando un producto de funciones en x:

$$F(x) = x\int_0^x f(t)\,dt$$

entonces la derivada de $F(x)$ es la derivada de un producto

$$F'(x) = 1 \cdot \int_0^x f(t)\,dt + x \cdot f(x)$$

donde hemos aplicado el primer teorema fundamental del cálculo.

20.14. *Aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo, **hállese***

$$a) \int_0^1 \sqrt{x}\,dx. \qquad b) \int_0^5 \sqrt[n]{x}\,dx.$$

Utilizar también el cambio de variable para hallar a) y b).

Solución

a) La función $g(x) = \dfrac{2}{3}x^{3/2} = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ con $n = 1/2$, cumple que

$$g'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{3/2-1} = \sqrt{x},$$

entonces

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}.$$

b) De forma análoga se comprueba que $\dfrac{x^{(1/n)+1}}{\dfrac{1}{n}+1} = g(x)$ cumple que $g'(x) = \sqrt[n]{x}$, luego

$$\int_0^5 \sqrt[n]{x}\,dx = \frac{n}{n+1}\cdot 5^{\frac{n+1}{n}}.$$

a) Mediante cambio de variable.

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y sea $g(t) = t^2$, entonces

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_{g(0)}^{g(1)} \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 f(g(t))\cdot g'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = \int_0^1 2t^2\,dt = \frac{2}{3}t^3\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

b) Mediante cambio de variable.

Sea $f(x) = \sqrt[n]{x}$ y sea $g(t) = t^n$, entonces $g'(t) = nt^{n-1}$ y

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_{g(0)}^{g(\sqrt[n]{5})} f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt[n]{5}} \sqrt[n]{t^n} \cdot n \cdot t^{n-1}\,dt =$$

$$= \int_0^{\sqrt[n]{5}} n \cdot t^n\,dt = \frac{n}{n+1} t^{n+1} \Big]_0^{\sqrt[n]{5}} = \frac{n}{n+1} \cdot 5^{\frac{n+1}{n}}.$$

20.15. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y tal que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) \cdot k$$

donde $m \leqslant k \leqslant M$.

b) Si f además es continua, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) \cdot f(w)$$

con $w \in [a, b]$.

Solución

Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$, entonces

$$(b - a) \cdot m = \int_a^b m \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b M = M(b - a).$$

Por tanto

$$m \leqslant k = \frac{\displaystyle\int_a^b f}{(b - a)} \leqslant M.$$

b) Por ser f continua en $[a, b]$ alcanza un máximo y un mínimo en $[a, b]$ (teorema de Weierstrass), sea

$$M = \max\{f(t) : t \in [a, b]\} \quad \text{y} \quad m = \min\{f(t) : t \in [a, b]\}.$$

Se tiene

$$m \cdot (b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b - a)$$

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx}{b - a} \leqslant M.$$

Por el teorema de los valores intermedios resulta que existe $w \in [a, b]$ tal que

$$f(w) = \frac{\displaystyle\int_a^b f}{(b - a)}$$

o lo que es lo mismo, $\displaystyle\int_a^b f = f(w)(b - a)$.

20.16. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable no negativa sobre $[a, b]$. Probar que para algún $w \in [a, b]$ es*

$$\int_a^b f(x)g(x) = f(w) \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

Solución

Al ser f continua en $[a, b]$, aplicando el teorema de Weierstrass tenemos que f alcanza un máximo y un mínimo en $[a, b]$, sea

$$M = \max \{f(t) : t \in [a, b]\} \quad \text{y} \quad m = \min \{f(t) : t \in [a, b]\},$$

se tiene que $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Por ser g no negativa, entonces para todo $x \in [a, b]$,

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x)$$

y por la monotonía de la integral

$$m \cdot \int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \leqslant M \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

luego

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx} \leqslant M.$$

Pero por el teorema de los valores intermedios, existe $w \in [a, b]$ tal que

$$f(w) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx}$$

o lo que es lo mismo

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(w) \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

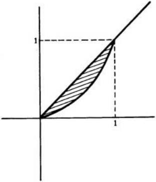
20.17. *Calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones:*

a) $g(x) = x^2$ *y* $f(x) = x$.

b) $g(x) = x^2 - 1$ *y* $f(x) = 1 - x^2$.

Solución

a) Calculamos los puntos de corte de las gráficas resolviendo la ecuación $x^2 - x = 0$, que tiene por raíces $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$.



El área del conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \quad x^2 \leqslant y \leqslant x\}$$

es el área pedida.

Entonces

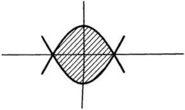
$$\text{Area } (A) = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

b) Calculemos las raíces de la ecuación

$x^2 - 1 = 1 - x^2$, éstas son $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

Luego las gráficas se cortan en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.



El área pedida viene representada por el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} : -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 - x^2 \geqslant y \geqslant x^2 - 1\},$$

Obsérvese que por la simetría del conjunto A

$$\text{área } (A) = 2 \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = 4 \int_{0}^{1} (1 - x^2)\, dx =$$

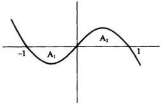
$$= 4\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^1 = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Nota: En el cálculo de áreas es importante considerar los conjuntos que se encuentran por debajo del eje de abscisas para sumar el área de éstos. Por simple cálculo de la integral resultarían restados con lo que el valor de la integral no coincidiría con el área.

20.18. *Calcúlese el área del conjunto comprendido entre las gráficas de las funciones* $y = x - x^3$, $y = 0$.

Solución

Calculemos los puntos de corte de las gráficas resolviendo la ecuación $x - x^3 = 0$ que tiene por raíces $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.



Obsérvese que $y \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$ y si $x \geqslant 0$ es $y \geqslant 0$ por tanto

$$\text{Area} = -\int_{-1}^{0} (x - x^3)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx$$

ya que si se observa la figura, se tienen dos áreas diferenciadas, una «negativa» formada por el conjunto

$$A_1 = \{(x, y)\colon -1 \leqslant x \leqslant 0,\quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

y otra «positiva» formada por el conjunto

$$A_2 = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Area $(A_1 \cup A_2)$ = Area (A_1) + Area (A_2), y

$$\text{Area } (A_1) = -\int_{-1}^{0} (x - x^3)\,dx$$

$$\text{Area } (A_2) = \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx.$$

Calculemos, por la simetría de la función,

$$\text{Area } (A_1 \cup A_2) = 2 \text{ Area } (A_2) = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_0^1 = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

20.19. *Calcúlese*

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t^3 + t^2)\,dt}{x^4}. \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} t^2 \cdot dt}{x^4}.$$

Solución

a) El límite se encuentra en condiciones de aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t^3 + t^2)\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2}{4x^3} = \frac{1}{4}.$$

b) De nuevo aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} t^2\,dt\right)'}{(x^4)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \cdot 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{2x^3} = 0.$$

20.20. *Calcular la derivada de la función*

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} t^2\,dt.$$

Solución

$$F(x) = \int_0^{x^3} t^2\,dt + \int_{x^2}^{0} t^2\,dt = \int_0^{x^3} t^2\,dt - \int_0^{x^2} t^2\,dt.$$

Sea $h_1(x) = \int_0^{x^3} t^2\,dt$, se tiene que $h_1(x)$ es composición de

$$h_2(x) = \int_0^x t^2\,dt \quad \text{y} \quad h_3(x) = x^3$$

luego

$$h_1'(x) = h_2'(h_3(x)) \cdot h_3'(x) = (x^3)^2 \cdot 3x^2 = 3x^8.$$

Sea $g_1(x) = \int_0^{x^2} t^2\,dt$, de forma análoga $g_1(x)$ es composición de

$$g_2(x) = \int_0^x t^2\,dt \quad \text{y} \quad g_3(x) = x^2$$

luego

$$g_1'(x) = g_2'(g_3(x)) \cdot g_3'(x) = (x^2)^2 \cdot 2x = 2x^5.$$

Luego $F'(x) = 3x^8 - 2x^5$.

21. FUNCIONES LOGARITMICAS, EXPONENCIALES Y TRIGONOMETRICAS

21.1. *Sabiendo que* $log_{10} 2 = 0{,}301030$, $log_{10} 3 = 0{,}477121$, $log_{10} 5 = 0{,}69897$ *y* $log_{10} 7 = 0{,}845098$. *Calcular:*

a) $log_{10} 49.000$.	*d)* $log_{10} 35$.
b) $log_{10} 0{,}021$.	*e)* $log_{10} 0{,}0002$.
c) $log_{10} 9{,}6$.	*f)* $log_{10} \frac{30}{7}$.

Solución

a) Se tiene que $49.000 = 10^3 \cdot 7^2$, luego

$$\log_{10} 49.000 = log_{10} 10^3 + \log_{10} 7^2 = 3 \log_{10} 10 + 2 \log_{10} 7 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}845098 = 4{,}690196.$$

b) $$\log_{10} 0{,}021 = \log_{10} \frac{21}{1.000} = \log_{10}(3 \cdot 7) - \log_{10} 10^3 =$$

$$= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 - 3 \log_{10} 10 =$$

$$= 0{,}477121 + 0{,}845098 - 3 = -1{,}677781.$$

c) $\log_{10} 9{,}6 = \log_{10} \frac{96}{10} = \log_{10}(2^5 \cdot 3) - \log_{10} 10 =$

$= 5 \cdot \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - \log_{10} 10 = 0{,}982271.$

d) $\log_{10} 35 = \log_{10}(7 \cdot 5) = \log_{10} 7 + \log_{10} 5 = 1{,}544068.$

e) $\log_{10} 0{,}0002 = \log_{10} \frac{2}{10^4} = \log_{10} 2 - 4 \log_{10} 10 =$

$= -3{,}698970.$

f) $\log_{10} \frac{30}{7} = \log_{10}(3 \cdot 10) - \log_{10} 7 =$

$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 7 = 0{,}632023.$

21.2. *Resolver los siguientes sistemas:*

a) $\begin{cases} \log(x^2 + 2) = 2 \log y \\ \log y = \log(x + 3) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log y + \log 3 = 3 \log x + 2 \log 2 \\ 2 \log y = 2 \log 5 + 5 \log x. \end{cases}$

Solución

a) El sistema se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{cases} \log(x^2 + 2) = \log y^2 \\ \log y = \log(x + 3) \end{cases}$$

y por ser el logaritmo una función inyectiva, se tiene,

$$\begin{cases} x^2 + 2 = y^2 \\ \qquad y = x + 3 \end{cases}$$

sustituyendo la segunda ecuación en la primera se obtiene,

$$x^2 + 2 = (x + 3)^2$$

y operando

$$6x + 7 = 0$$

de donde

$$x = -\frac{7}{6}, \quad y = \frac{11}{6}.$$

b) $\log y + \log 3 = 3 \log x + 2 \log 2$ es igual a la siguiente identidad $\log 3y = \log(x^3 \cdot 4)$.

La ecuación $2 \log y = 2 \log 5 + 5 \log x$ es igual a la identidad $\log y^2 = \log(5^2 \cdot x^5)$.

Por tanto, el sistema dado es equivalente al sistema

$$\begin{cases} 3y = 4x^3 \\ y^2 = 25x^2 \end{cases}$$

sustituyendo $y = \frac{4}{3}x^3$ en la segunda ecuación se tiene

$$\frac{16x^6}{9} = 25x^2$$

y

$$\frac{x^2(16x^4 - 225)}{9} = 0$$

de donde $x = 0$, $y = 0$ es una solución del sistema, y $x = \pm\sqrt{\frac{15}{4}}$, $y = \pm 5\sqrt{\frac{15}{4}}$ son las otras soluciones del sistema.

21.3. *Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:*

a) $5^{x+1} + 5^{x+4} = 15.750$

b) $5^{x^2} + 5^{x^2+2} = 130$

c) $2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 84.$

Solución

a) La ecuación se puede escribir $5^x(5 + 5^4) = 15.750$ de donde

$$5^x = \frac{15.750}{630} = \frac{5^3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7}{5 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7} = 5^2.$$

Como la función $f(x) = 5^x$ es inyectiva se tiene que $x = 2$.

b) En la ecuación $5^{x^2} + 5^{x^2+2} = 130$, operamos, y resulta

$$5^{x^2}(1 + 5^2) = 130,$$

de donde

$$5^{x^2} = \frac{130}{26} = 5$$

luego, por idéntica razón al apartado *a)* se tiene $x^2 = 1$, por tanto $x = 1$ y $x = -1$ son las raíces de la ecuación.

c) De manera análoga tenemos

$$2^x(2^{-1} + 2 + 2^3) = 84$$

multiplicando por 2

$$2^x(1 + 4 + 16) = 168$$

de donde

$$2^x = \frac{168}{21} = 2^3$$

luego $x = 3$.

21.4. *Hallar los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}{x^3}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}}{x^2}$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}}{x^3}$.

Solución

Como surge la indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos reiteradamente la regla de L'Hôpital para obtener los límites.

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}.$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x} - 1 + x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-1}{(1+x)^2} + 1}{2} = 0.$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-1}{(1+x)^2} + 1}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2(1+x)}{(1+x)^4}}{6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x)^3} = \frac{1}{3}.$$

21.5. *Hallar los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{(\log x)^n}$.

b) $\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^n$.

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^n}{x}$.

Solución

a) Tenemos que aplicar la regla de L'Hôpital pues, por sustitución, surge la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\log x)^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{n(\log x)^{n-1}},$$

que vuelve a ser un límite indeterminado del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Repitiendo n veces el proceso se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\log x)^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{n(n-1)\cdots 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{n!} = \infty.$$

Este resultado se interpreta como que el crecimiento de x es más rápido que el de cualquier potencia del $\log x$.

b) La indeterminación resultante $0\cdot\infty$, nos induce a aplicar la regla de L'Hôpital. Vamos a proceder por inducción:

para $n=1$

$$\lim_{x\to 0^+} x(\log x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

supongamos que es cierto para $n-1$, es decir $\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^{n-1} = 0$, y veamos que es cierto para n

$$\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^n = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\log x)^n}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{n(\log x)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-n)x(\log x)^{n-1} = -n\cdot 0 = 0.$$

Luego, en efecto, $\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^n = 0$, para todo n.

c) Que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^n}{x} = 0$, se deduce inmediatamente de *a*) pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\dfrac{x}{(\log x)^n}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

21.6. *Calcular los siguientes límites:*

a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} \quad 0 < \alpha < 1$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x \quad 0 < \alpha < 1.$

Solución

a) Resulta la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, luego aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \alpha x^\alpha = \infty.$$

Por tanto, la función $f(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$ converge más deprisa a $+\infty$ que el logaritmo.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(-\alpha)x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$

21.7. *Hállense los siguientes límites:*

a) $\mathit{lim}_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$.

b) $\mathit{lim}_{x\to -\infty} e^x \cdot x^n$.

c) $\mathit{lim}_{x\to 0} e^{-1/x}$.

Solución

Nuevamente, la técnica es aplicar la regla de L'Hôpital.

a) Procedamos por inducción:
veamos para $n = 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty,$$

supongamos que es cierto para $n-1$, es decir $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^{n-1}} = \infty$ y veamos que es cierto para n.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \infty = \infty.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Procedamos por inducción:

veamos para $n = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x \cdot x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0,$$

supongamos que es cierto para $n - 1$, es decir $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x \cdot x^{n-1} = 0$ y veamos que es cierto para n

$$\lim_{x \to -\infty} e^x \cdot x^n = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^n}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{nx^{n-1}}{-e^{-x}} =$$

$$= -n \lim_{x \to -\infty} e^x \cdot x^{n-1} = -n \cdot 0 = 0.$$

c) $\lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{e^{1/x}} = \dfrac{1}{e^{\lim\limits_{x \to 0} 1/x}} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = 0.$

21.8. *Dadas las funciones*

a) $log(+\sqrt{x^2 + 1})$.

b) $log(+\sqrt{x^2 - 1})$.

c) $log[(x - 1)(x - 2)(x - 3)]$.

Hallar los dominios de definición. Calcular las derivadas.

Solución

Para hallar el dominio de definición de una función del tipo $\log f(x)$ basta con hallar el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$, dado que $\log x$ está definido si $x > 0$. Entonces

a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0\} = \mathbb{R}$.

b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-2)(x-3) > 0\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} : x > 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$.

Este resultado se obtiene hallando el signo del polinomio, en efecto, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ es positiva para cualquier $x > 3$, pues los tres factores son positivos; en $x = 3$, $f(x) = 0$ y en $(2, 3)$ tiene signo negativo, pues $(x-1) > 0$, $(x-2) > 0$ pero $(x-3) < 0$; $f(2) = 0$ y en $(1, 2)$ el signo es positivo pues $(x-1) > > 0$, pero $(x-2) < 0$ y $(x-3) < 0$; $f(1) = 0$ y en $(-\infty, 1)$ los tres factores son negativos. Calculemos las derivadas:

a) $$(\log\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x^2+1}$$

en el dominio de definición, o sea, en $\mathbb{R}$.

b) $$(\log\sqrt{x^2-1})' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}$$

en su intervalo de definición: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

c) $$(\log[(x-1)(x-2)(x-3)])' =$$
$$= (\log(x-1) + \log(x-2) + \log(x-3))' =$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

en su intervalo de definición: $(1, 2) \cup (3, \infty)$.

21.9. *Hallar las derivadas de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ *d)* $f(x) = \log(\sqrt{\log x})$

b) $f(x) = e^{e^{e^x}}$ *e)* $f(x) = \log\sqrt{e^{ax+b}}$

c) $f(x) = \log(\log\sqrt{x})$.

Solución

En todos los apartados se aplica la regla de la cadena.

a) $f(x) = h_2 \circ h_1(x)$, donde $h_1(x) = \sqrt{x^2+1}$ y $h_2(x) = e^x$

entonces $f'(x) = h_2'(h_1(x)) \cdot h_1'(x)$, luego

$$f'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b) $f(x) = h_3 \circ h_2 \circ h_1(x)$, donde $h_1(x) = h_2(x) = h_3(x) = e^x$,

entonces $f'(x) = h_3'(h_2(h_1(x))) \cdot h_2'(h_1(x)) \cdot h_1'(x)$

luego $f'(x) = e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x$.

c) $f(x) = h_3 \circ h_2 \circ h_1(x)$, donde $h_1(x) = \sqrt{x}$, $h_2(x) = h_3(x) = \log x$ aplicando la fórmula de *b)*, se tiene,

$$f'(x) = \frac{1}{\log\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\log\sqrt{x}}.$$

d) $f(x) = h_3 \circ h_2 \circ h_1(x)$, donde $h_1(x) = \log x$, $h_2(x) = \sqrt{x}$ y $h_3(x) = \log x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\log x}.$$

e) $f(x) = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1(x)$, donde $h_1(x) = ax + b$, $h_2(x) = e^x$, $h_3(x) = \sqrt{x}$ y $h_4(x) = \log x$. Por tanto

$$f'(x) = h_4'(h_3(h_2(h_1(x)))) \cdot h_3'(h_2(h_1(x))) \cdot h_2'(h_1(x)) \cdot h_1'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{ax+b}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{ax+b}}} \cdot e^{ax+b} \cdot a = \frac{a \cdot e^{ax+b}}{2e^{ax+b}} = \frac{a}{2}.$$

21.10. *Probar que la función $f(x) = \ln(x)$ es cóncava y que $g(x) = e^x$ es convexa*

Solución

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \text{ y } f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

por tanto $f''(x) < 0$, luego es cóncava.

Por otra parte, $g'(x) = e^x$ y $g''(x) = e^x$, por tanto $g''(x) > 0$ para todo x, luego es convexa.

21.11. *Probar que si $f'(x) = c \cdot f(x)$ en todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = k \cdot e^{cx}$ para algún k.*

Solución

Consideremos la función $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{cx}}$.

Si probamos que es una constante quedaría probado el resultado,

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{cx} - f(x) \cdot e^{cx} \cdot c}{(e^{cx})^2} =$$

$$= \frac{c \cdot f(x) \cdot e^{cx} - c \cdot f(x) \cdot e^{cx}}{e^{2cx}} = 0$$

luego para todo $x \in \mathbb{R}$ es $g(x) = k$.

Por tanto, $f(x) = g(x) \cdot e^{cx} = k \cdot e^{cx}$.

Nota: Obsérvese que la expresión $f'(x) = cf(x)$ caracteriza, salvo una constante, a la función e^{cx}.

21.12. *Probar que si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$f(0) = 1 \quad y \quad f(x + y) = f(x) \cdot f(y),$$

entonces $f(x) = e^{cx}$ *para algún c.*

Solución

Por definición de derivada, se tiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x) \cdot f(h)] - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[f(x) \left(\frac{f(h) - 1}{h} \right) \right] = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} =$$

$$= f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(x) \cdot f'(0).$$

Pero en el problema 21.11 hemos visto que si $f'(x) = c \cdot f(x)$ en todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = k \cdot e^{cx}$ para algún k.

Por tanto

$$f(x) = k \cdot e^{f'(0) \cdot x}.$$

Para determinar k, hacemos $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = k \cdot e^{f'(0) \cdot 0} \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k = 1.$$

Luego $f(x) = e^{cx}$ con $c = f'(0)$.

21.13. *Una cierta cantidad $c(t)$ que crece según una ley del tipo $c'(t) = M \cdot c(t)$ con $M > 0$ (o según el problema 21.11, $c(t) = c_0 e^{Mt}$) se denomina un crecimiento exponencial. Veamos algunos ejemplos:*

1.

Bajo condiciones ideales, la ley que rige el aumento de bacterias en un cultivo es un crecimiento exponencial. En un determinado experimento e inicialmente hay 1.000 bacterias y al cabo de 10 minutos hay 5.000 bacterias. Calcular aproximadamente el número de bacterias que habrá en una hora.

$$c(t) = 1.000\, e^{Mt}$$

en 10 minutos

$$c(10) = 1.000\, e^{M \cdot 10} = 5.000$$

luego $e^{M \cdot 10} = 5$.

Por tanto, al cabo de 60 minutos habrá

$$c(60) = 1.000 \cdot e^{M \cdot 60} = 1.000\, (e^{M \cdot 10})^6 = 1.000 \cdot 5^6 = 15.625.000.$$

2.

Se ha comprobado que el crecimiento de la población de un determinado país se rige por la ley $c(t) = 0{,}02c(t)$, donde t se mide en años, si en el momento actual la población es de 10^6 habitantes. Calcúlese cuál será dentro de 14 años.

$$c(t) = c_0 \cdot e^{0,02 \cdot t}$$
$$c(t) = 10^6\, e^{0,02 \cdot t}$$

entonces

$$c(14) = 10^6 \cdot e^{0,02 \cdot 14} = 10^6 \cdot 1{,}323130 = 1.323.130.$$

Nótese que en este tipo de cálculos se desprecian cifras decimales bien por exceso, bien por defecto.

3.

Hallar la ley de crecimiento de la población mundial basándose en la siguiente noticia: «Dentro de 13 años, en el año 2000, la población mundial se duplicará».

Esto quiere decir, midiendo t en años, que

$$2c_0 = c_0 e^{M \cdot 13}$$

donde c_0 es la población actual, por tanto

$$2 = e^{M \cdot 13}$$

y

$$M \cdot 13 = \log 2$$

de donde

$$M = \frac{\log 2}{13} \simeq 0{,}05332.$$

luego la ley de crecimiento es:

$$c'(t) = 0{,}05332 \cdot c(t)$$

o bien,

$$c(t) = M_0\, e^{0,05332 \cdot t}.$$

21.14. *De forma análoga al problema 21.13, una cantidad **que decrece** según una ley del tipo $c'(t) = M \cdot c(t)$ con $M < 0$, se **denomina de** decrecimiento exponencial. Por tanto,*

$$c(t) = c_0 e^{Mt} \quad \textit{con} \quad M < 0.$$

Veamos algunos ejemplos:

1.

Una sustancia radiactiva se desintegra con una velocidad $c'(t) = -k_0 c(t)$, donde $k_0 = 10^{-4}$ y t lo calculamos en años. Al cabo de 5.000 años quedan 1.000 gramos de sustancia radiactiva. ¿Cuántos gramos había inicialmente?

$$\begin{aligned} 1.000 &= M_0 \cdot e^{-10^{-4} \cdot 5.000} = \\ &= M_0 \cdot e^{-10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 5} = \\ &= M_0 \cdot e^{-5 \cdot 10^{-1}} \end{aligned}$$

$$M_0 = \frac{1.000}{e^{-0,5}} \simeq 1.649.$$

Luego hace 5.000 años había 1.649 gramos.

2.

Estadísticas industriales han demostrado que el valor de la maquinaria industrial se deprecia según la fórmula $Q(t) = Q_0 e^{-0,03 \cdot t}$ con t medida en años. Al asegurar la maquinaria de 30 años se la ha valorado en $30 \cdot 10^6$ pesetas. ¿Cuál fue su valor inicial?

$$30 \cdot 10^6 = Q_0 \cdot e^{-0,03 \cdot 30} = Q_0 \cdot e^{-0,9}$$

$$Q_0 = \frac{30 \cdot 10^6}{e^{-0,9}} \simeq 73.788.093.$$

Luego su valor inicial fue 73.788.093 pesetas.

21.15. *Estudiar y representar gráficamente la función* $f(x) = e^{-2x}$.

Solución

1. *Campo de existencia.*

$$f(x) = e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}.$$

Como $e^{2x} \neq 0$ para todo x, se tiene que la función está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. *Puntos de discontinuidad.*

La función es continua en todo punto, pues no existe ningún valor de x que anule el denominador.

3. *Simetrías.*

Esta función no presenta ningún tipo de simetría, pues, por ejemplo,

$$f(1) \neq f(-1)$$

y

$$f(1) \neq -f(-1).$$

4. *Asíntotas.*

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$, resulta que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Además es única, pues $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = \infty$.

No tiene asíntotas oblicuas, pues

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = 0.$$

5. *Intersección con los ejes.*

   Con el eje OY: $f(0) = e^0 = 1$, luego la gráfica corta a OY en $(0, 1)$.

   Con el eje OX: la ecuación $0 = e^{-2x}$ no tiene solución real, luego no corta al eje de las abscisas.

6. *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

$$f'(x) = (-2)e^{-2x} = \frac{-2}{e^{2x}}.$$

   Como $f'(x) < 0$ para todo x, la función es siempre decreciente.

7. *Máximos y mínimos relativos.*

   La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene soluciones reales, luego no existen ni máximos ni mínimos relativos.

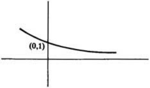
8. *Intervalos de concavidad y convexidad.*

$$f''(x) = 4 \cdot e^{-2x} = \frac{4}{e^{2x}}.$$

   Como $f''(x) > 0$ para todo x, la función es convexa.

9. *Puntos de inflexión.*

   La ecuación $f''(x) = 0$ no tiene soluciones reales, luego no existen puntos de inflexión.



21.16. *Dibujar la gráfica de la función*

$$g(x) = e^{-x^2}.$$

Solución

Puntos de corte con los ejes, es decir, valores x para los cuales $e^{-x^2} = 0$, no existen, pues la exponencial no se anula. Es simétrica respecto al eje OY, pues

$$g(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = g(x).$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para hallarlos se usa el signo de la derivada:

$$g'(x) = -2xe^{-x^2}$$

si $x < 0$, es $g'(x) > 0$, luego $g(x)$ crece en $(-\infty, 0)$

si $x > 0$, es $g'(x) < 0$, luego $g(x)$ decrece en $(0, +\infty)$.

La 1.ª derivada sólo se anula en $x = 0$.

$$g''(x) = -2e^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot 4x^2$$

como $g''(0) < 0$, existe un máximo, luego $(0, 1)$ es un máximo relativo.

Puntos de inflexión, o puntos donde la función pasa de cóncava a convexa y viceversa. Una condición suficiente es que $g''(x) = 0$, siendo las raíces de esta ecuación

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Luego

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

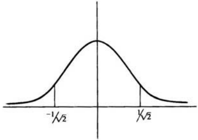
son los puntos de inflexión.

En $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ es $g''(x) > 0$, luego la función es convexa. En el complementario es $g''(x) < 0$ luego la función es cóncava.

Para finalizar

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Por tanto, la gráfica de la función es



21.17. *Estudiar la función $f(x) = x \log|x|$ y representar su gráfica.*

Solución

La función $f(x)$ está claramente definida en $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que $\log|x|$ está definido en dicho conjunto. Veamos qué ocurre en $x = 0$.

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} x \log|x| = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} x\log|x| = \lim_{x\to 0^-} x\log(-x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(-x)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-1}{-x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0.$$

Por tanto si consideramos $f(0) = 0$, la función

$$f(x) = \begin{cases} x\log|x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

está definida y es continua.

De nuevo la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, veamos en $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h\log|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h\log h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \log h = -\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h\log|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h\log(-h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \log(-h) = -\infty.$$

Luego existe derivada (en sentido generalizado) y es

$$f'(x) = \begin{cases} \log|x| + 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -\infty & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Las raíces de la ecuación $x\log|x| = 0$ son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$, luego la curva pasa por $(0,0)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$.

Para hallar los máximos y mínimos relativos en $\mathbb{R} - \{0\}$ resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$,

si $x > 0$, $1 + \log x = 0$ tiene por raíz $x = e^{-1}$

si $x < 0$, $1 + \log(-x) = 0$ tiene por raíz $x = -e^{-1}$.

Como $f''(x) = \dfrac{1}{x}$, tenemos que $f''(e^{-1}) > 0$, luego tiene un mínimo y $f''(-e^{-1}) < 0$, luego tiene un máximo.

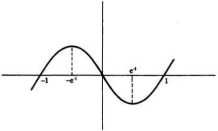
En $(-\infty, -e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$ es $f'(x) > 0$, luego la función es creciente y en $(-e^{-1}, e^{-1})$ es $f'(x) < 0$, luego la función es decreciente. Por otra parte

$$\lim_{x \to \infty} x \log |x| = \lim_{x \to \infty} x \log x = \infty$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} x \log |x| = \lim_{x \to -\infty} x \log(-x) = -\infty.$$

Con estos datos ya podemos representar la gráfica de la función



21.18. *Estudiar la gráfica de la función*

$$f(x) = e^{-x} \log x.$$

Solución

La función $f(x)$ sólo está definida en $(0, +\infty)$. Además, en todo el intervalo de definición $f(x)$ es continua y derivable.

Veamos en qué puntos la gráfica corta al eje de las abscisas. La ecuación $f(x) = 0$, es decir $e^{-x} \log x = 0$ tiene como única solución $x = 1$.

Los puntos de máximo o mínimo relativos han de cumplir que $f'(x) = 0$, o sea,

$$e^{-x} \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot e^{-x}(-1) = 0$$

o

$$e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \log x\right) = 0$$

por tanto

$$\frac{1}{x} - \log x = 0$$

ecuación que es equivalente a $x - e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Si $x = 1$ entonces $1 - e < 0$ y si $x = 2$ entonces $2 - e^{\frac{1}{2}} > 0$, por tanto hay una raíz entre 1 y 2. Denotemos por α a dicha raíz pues su cálculo debe hacerse por métodos numéricos.

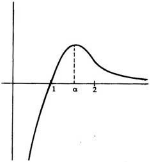
En el intervalo $(0, \alpha)$ se tiene que $f'(x) > 0$ y en $(\alpha, +\infty)$ se tiene que $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es creciente en $(0, \alpha)$ y decreciente en $(\alpha, +\infty)$. Por otra parte,

$$\lim_{x \to 0} e^{-x} \log x = -\infty$$

y

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \log x = \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x \cdot e^x} = 0.$$

Por tanto, la gráfica de la función es



21.19. *Hallar los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.   d) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - \cos \pi x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.   e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$.

c) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{\pi}} \cos\dfrac{1}{x}$.   f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(1 - \cos x)}{x^2}$.

Solución

a) Como la función $\operatorname{sen} t$ toma valores en $[-1, 1]$ se tiene que

$$\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$$

luego $\lim\limits_{x\to 0} \left|x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right| \leqslant \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0.$

b) Este límite se hace simplemente por sustitución puesto que las funciones factores están perfectamente definidas en $x = 1$ y son continuas, por tanto

$$\lim_{x\to 1} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1 \cdot \operatorname{sen} 1 = \operatorname{sen} 1.$$

c) $\lim_{x\to \frac{2}{\pi}} \cos\frac{1}{x} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$

d) $\lim_{x\to 1} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 1 - 1 = 0.$

e) Se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Podemos aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

f) Igual que en el caso *e*) aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

21.20. *Calcular los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 7x}{(x - x^2)^2}.$ *d)* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}.$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}.$ *e)* $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x.$

c) $\lim_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg} x.$ *f)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}.$

Solución

a) Calculemos primero los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{5} = \lim_{x\to 0} \cos 5x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{7\cos 7x}{7} = \lim_{x\to 0} \cos 7x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-x^2)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(x-x^2)(1-2x)}{2x} = \lim_{x\to 0} (1-x)(1-2x) = 1.$$

La expresión de nuestro límite la escribimos de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 7x}{(x-x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\cdot 5x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\cdot 7x}{\dfrac{(x-x^2)^2}{x^2}\cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x}}{(x-x^2)^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{35x^2}{x^2} = 1\cdot 35 = 35.$$

b) Se tiene que

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x} = \frac{\cos x - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{1-\cos x} =$$

$$= \frac{\cos x(1-\cos x) + \operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} = \cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} =$$

$$= \cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{x^2}{2}}.$$

En el problema 21.19, hemos visto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}} = 1$$

y

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \cos x + \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}} \cdot \dfrac{x^2}{2}} =$$

$$= 1 + 2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2} \cdot x^2} = 1 + 2 = 3.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1.$$

d) Aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\cos x \operatorname{sen} x}{\cos^4 x} + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \operatorname{sen} x}{\cos^4 x \operatorname{sen} x} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos^3 x} = 1 + 2 = 3.$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x = 0.$$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} =$

$$= \frac{1}{3}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 =$$

$$= \frac{3^2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = 3\cdot 1 = 3.$$

21.21. *Calcular los siguientes límites*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen} x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0^+}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}}.$$

Solución

a) Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = 1.$$

b) Aplicando logaritmos se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \ln (\cos 3x)^{1/x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln (\cos 3x)}{x^3}.$$

Por la regla de L'Hôpital dos veces tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln (\cos 3x)}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\cos 3x} \cdot (-3) \operatorname{sen} 3x}{3x^2} =$$

$$= - \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}}{x^2} = - \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x^2} =$$

$$= - \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3}{2x} = - \frac{3}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x \cos^2 3x} = -\infty$$

luego

$$\lim_{x \to 0^+} (\cos 3x)^{1/x^3} = e^{-\infty} = 0.$$

21.22. *Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Calcular $f'(0)$ y $f''(0)$.

Solución

Por definición,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} h}{h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h - h}{h^2}$$

aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\operatorname{sen} h}{2} = 0$$

por tanto

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

De nuevo, aplicando la definición

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cos h - \operatorname{sen} h}{h^3},$$

aplicando la regla de L'Hôpital

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - h \operatorname{sen} h - \cos h}{3h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-\operatorname{sen} h}{3h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cos h}{3} = -\frac{1}{3}.$$

21.23. *Probar que* $tg\,(x + y) = \dfrac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x\,tg\,y}$. *Hallar* $tg\,2x$.

Solución

Por definición de tangente,

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}.$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos x \cdot \cos y$, se tiene

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}}$$

por tanto,

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

y

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Nota. En esta fórmula hay que evitar los puntos $(x + y)$, con $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ e $y = k'\pi + \dfrac{\pi}{2}$, pues en este caso la tangente no es un número real.

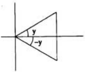
21.24. *Poner en forma de producto de funciones trigonométricas las siguientes expresiones:*

a) $\operatorname{sen} x' + \operatorname{sen} y'$.

b) $\cos x' + \cos y'$.

Solución

a) Sumando las siguientes igualdades



$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$$
$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$$

se tiene que

$$\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 2 \operatorname{sen} x \cos y.$$

Resolviendo $x + y = x'$, y, $x - y = y'$, se tiene $x = \dfrac{x' + y'}{2}$ e $y = \dfrac{x' - y'}{2}$ y sustituyendo tenemos

$$\operatorname{sen} x' + \operatorname{sen} y' = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x' + y'}{2}\right) \cos\left(\frac{x' - y'}{2}\right).$$

b) Sumando las igualdades

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

se tiene que

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$$

y por la misma sustitución del apartado anterior obtenemos

$$\cos x' + \cos y' = 2 \cos\left(\frac{x' + y'}{2}\right) \cos\left(\frac{x' - y'}{2}\right).$$

21.25. *a) Hallar expresiones de* $\cos^2 x$ *y* $\operatorname{sen}^2 x$ *en función de* $\cos 2x$.

b) Hallar $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ *en función de* $\cos x$

Solución

a) Sumando las igualdades

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$
$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

se tiene

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

luego

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \qquad [1]$$

Restando las igualdades anteriores se tiene

$$1 - \cos 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$$

luego

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \qquad [2]$$

b) De *a*) se deduce que

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

y

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

Nota. Las fórmulas [1] y [2] son extremadamente útiles en el cálculo de primitivas.

21.26. *Hallar las raíces de la ecuación* $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$ *en el intervalo* $[0, \pi]$.

Solución

Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, se tiene que la ecuación es de la forma

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x$$

o bien

$$\operatorname{sen} x(1 - 2\cos x) = 0.$$

Por tanto, las raíces serán las de las ecuaciones $\operatorname{sen} x = 0$ y $1 - 2\cos x = 0$.

Las raíces de $\operatorname{sen} x = 0$ en $[0, \pi]$ son $x = 0$ y $x = \pi$.

La única raíz de $1 - 2\cos x = 0$ es $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Por tanto, la solución es $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$ y $x = \pi$.

21.27. *Hallar los valores de x en el intervalo* $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ *tales que*

$$sen^2 x - cos^2 x + sen\, x = 0.$$

Solución

Como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, entonces $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 0$$

o bien

$$2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0.$$

Si sustituimos $\operatorname{sen} x$ por y, resulta la siguiente ecuación de segundo grado

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

cuyas raíces son $y = \frac{1}{2}$, $y = -1$.

Por tanto, hay que resolver las ecuaciones

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = -1.$$

Las raíces de $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ en $[0, 2\pi]$ son $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$.

La raíz de $\operatorname{sen} x = -1$ en $[0, 2\pi]$ es $x = \frac{3\pi}{2}$.

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6} \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

21.28. *Calcular* *a)* $\int_0^{\pi/2} sen\, x\, dx.$ *b)* $\int_0^{\pi} cos\, x\, dx.$

c) $\int_{-\pi/2}^{\pi} sen\, x\, dx.$ *d)* $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt.$ *e)* $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{cos^2 x}\, dx.$

Solución

a) La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es integrable en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puesto que es continua. Además, si $g(x) = -\cos x$ se tiene que $f(x) = g'(x)$ y por el segundo teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1.$$

b) Con la notación de *a)* si $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene que $f(x) = g'(x)$, por tanto

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = g(\pi) - g(0) = \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0 = 0.$$

(Este resultado es obvio pues la gráfica de $\cos x$ que queda por encima del eje de las x encierra el mismo área que la gráfica de $\cos x$ por debajo del eje de abscisas).

c) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = -\cos x$, se tiene

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = g(\pi) - g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \pi - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 1 - 0 = 1.$$

d) Si $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ y $g(t)=\operatorname{arc\,tg} t$, se tiene que $g'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}=$ $=f(t)$, y por tanto

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = g(1)-g(0) = \operatorname{arc} tg\, 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

e) Si $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ y $g(x)=\operatorname{tg} x$, entonces

$g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=f(x)$ y por tanto

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1.$$

21.29. *Hallar las derivadas de las siguientes funciones*

a) $f(x) = sen^3(x^2-1)\cdot tg(\sqrt{1-2x})$.

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{cos^3\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{1+cos\, x}{tg^2\, x}}$.

Solución

a) $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(x^2-1)\cdot\cos(x^2-1)\cdot 2x\cdot\operatorname{tg}(\sqrt{1-2x}) +$

$+\operatorname{sen}^3(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{\cos^2(\sqrt{1-2x})}\cdot\dfrac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = 6x\operatorname{sen}^2(x^2-1)\cdot$

$\cdot\cos(x^2-1)\cdot\operatorname{tg}(\sqrt{1-2x}) - \dfrac{\operatorname{sen}^3(x^2-1)}{\sqrt{1-2x}\cdot\cos^2(\sqrt{1-2x})}.$

b) $g'(x) =$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\cdot\cos^3\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{1-x^2}\cdot 3\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}}{\cos^6\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{-x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

c) $h'(x) =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}}}\cdot\left[\frac{-\operatorname{sen} x\operatorname{tg}^2 x - (1+\cos x)(2\operatorname{tg} x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^4 x}\right] =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1+\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}}}\cdot\left[\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x + 2(1+\cos x)}{\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}^3 x}\right].$$

21.30. ***Hallar las derivadas de las siguientes funciones***

a) $f(x) = 4^{sen^2(2x)}\cdot log\left(\frac{x^2-1}{x}\right).$

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-(x^2+1)^3}{tg\, x}}.$

c) $h(x) = \frac{log\,(\sqrt{x^4-1})}{sen^3\,(2x+x^2)}.$

Solución

a) $f'(x) = 4^{\text{sen}^2 (2x)} \cdot \log 4 \cdot 2 \,\text{sen}\,(2x) \cdot \cos (2x) \cdot 2 \cdot \log \left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right) +$

$$+ 4^{\text{sen}^2 (2x)} \cdot \frac{\dfrac{2x \cdot x - 1(x^2 - 1)}{x^2}}{\dfrac{x^2 - 1}{x}} = 4 \cdot \log 4 \cdot 4^{\text{sen}^2 (2x)} \cdot$$

$$\cdot \,\text{sen}\,(2x) \cdot \cos (2x) \log \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) + \frac{4^{\text{sen}^2 (2x)} \cdot (x^2 + 1)}{x(x^2 - 1)}.$$

b) $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{-(x^2+1)^3}{\text{tg}\, x}} \cdot \dfrac{-3(x^2+1)^2 (2x)\, tg\, x + \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot (x^2+1)^3}{\text{tg}^2 x} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{-(x^2+1)^3}{\text{tg}\, x}} \cdot \left(\frac{-6x(x^2+1)^2}{\text{tg}\, x} + \frac{(x^2+1)^3}{\cos^2 x \,\text{tg}^2 x} \right).$$

c) $h'(x) =$

$$= \frac{\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} \cdot \dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4-1}} \cdot \text{sen}^3 (2x+x^2)\right] - [3\,\text{sen}^2 (2x+x^2) \cdot \cos (2x+x^2) \cdot (2+2x) \cdot \log (\sqrt{x^4-1})]}{\text{sen}^6 (2x + x^2)} =$$

$$= \frac{\dfrac{2x^3 \cdot \text{sen}\,(2x+x^2)}{(x^4-1)} - 6 \log (\sqrt{x^4-1}) \cdot \cos (2x+x^2) \cdot (1+x)}{\text{sen}^4 (2x+x^2)}.$$

22. CALCULO DE PRIMITIVAS

A lo largo de este capítulo el logaritmo neperiano de un número x se designará indistintamente por $\log x$ o por $\ln x$.

22.1. *a)* $I = \int (x^5 + 2x^3 + x^{-1/2})\,dx.$

b) $I = \int (x + x^{-1} + x^{-1/2})\,dx.$

Solución

a) $$I = \int x^5\,dx + 2\int x^3\,dx + \int x^{-1/2}\,dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} + 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} =$$

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}.$$

Luego $I = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^4}{2} + 2\sqrt{x} + C.$

b) $I = \int x\,dx + \int x^{-1}\,dx + \int x^{-1/2}\,dx =$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln x + 2\sqrt{x}.$$

Luego $I = \dfrac{x^2}{2} + \ln x + 2\sqrt{x} + C.$

22.2. *Calcular*

a) $I = \int (5x+7)^4\,dx.$

b) $I = \int \dfrac{(ln\ x)^5}{x}\,dx.$

Solución

a) Esta integral es de la forma $\int (f(x))^n \cdot f'(x)\,dx$, sin más que realizar los siguientes cambios

$$I = \frac{5}{5}\int (5x+7)^4\,dx = \frac{1}{5}\int (5x+7)^4 \cdot 5 \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{(5x+7)^5}{5} = \frac{1}{25}(5x+7)^5.$$

Luego la solución es

$$I = \frac{1}{25}(5x + 7)^5 + C.$$

b) Análogamente, si $f(x) = \ln x$, esta integral es de la forma

$$I = \int [f(x)]^5 \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^6}{6}.$$

Por tanto,

$$I = \frac{(\ln x)^6}{6} + C.$$

22.3. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{2x + 5}{(x^2 + 5x)^{1/6}} dx.$

Solución

Como la derivada de $f(x) = x^2 + 5x$ es el numerador, resulta que

$$I = \int [f(x)]^{-1/6} \cdot f'(x)\, dx,$$

y esta integral es inmediata

$$I = \frac{[f(x)]^{-1/6+1}}{-\frac{1}{6} + 1} = \frac{(x^2 + 5x)^{5/6}}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}(x^2 + 5x)^{5/6}.$$

Luego

$$I = \frac{6}{5}(x^2 + 5x)^{5/6} + C.$$

22.4. *Calcular*

a) $I = \int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx.$

b) $I = \int \frac{1}{x \ln x} dx.$

Solución

a) Dada la función $f(x) = x^3 + 5$, se tiene que $f'(x) = 3x^2$, por tanto

$$I = \frac{3}{3} \int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 + 5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln(f(x)) = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 5).$$

Luego la solución buscada es

$$I = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 5) + C.$$

b) $I = \int \frac{1/x}{\ln x} dx$, evidentemente si $f(x) = \ln x$, se tiene pues que

$$I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) = \ln(\ln x).$$

Luego

$$I = \ln(\ln x) + C.$$

22.5. $I = \displaystyle\int \frac{1}{e^x + 1}\, dx.$

Solución

$$I = \int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1}\, dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx = \int 1\, dx - \int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx =$$

$$= x - \int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = x - \ln(e^x + 1),$$

ya que si $f(x) = e^x + 1$, entonces $f'(x) = e^x$, de donde

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(e^x + 1).$$

Por tanto

$$I = x - \ln(e^x + 1) + C.$$

22.6. *Calcular* $I = \displaystyle\int x^2\, tg\, x^3\, dx.$

Solución

$$I = \int x^2 \operatorname{tg} x^3\, dx = \int x^2 \frac{\operatorname{sen} x^3}{\cos x^3}\, dx,$$

pero $(\cos x^3)' = -3x^2 \operatorname{sen} x^3$, por tanto

$$I = \frac{-3}{-3} \int x^2 \frac{\operatorname{sen} x^3}{\cos x^3}\, dx = -\frac{1}{3} \int \frac{-3x^2 \operatorname{sen} x^3}{\cos x^3}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln(\cos x^3).$$

La solución es, pues,

$$I = -\frac{1}{3}\ln(\cos x^3) + C.$$

22.7. $I = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Solución

Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, por tanto,

$$I = 2\int \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos f(x)\cdot(f'(x))\,dx =$$

$$= 2\,\mathrm{sen}\, f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{x}.$$

Luego la solución es

$$I = 2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{x} + C.$$

22.8. *Calcular*

a) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$

b) $I = \int \frac{dx}{16 + x^2}.$

Solución

a) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9\left[1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2\right]}} = \int \frac{1/3}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3}.$

Luego la solución completa es

$$I = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} + C.$$

b) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{16\left[1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2\right]} = \frac{1}{4} \int \frac{1/4}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{4}.$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{4} + C.$$

22.9. *Calcular*

a) $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx.$

b) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - (\operatorname{tg} x)^2}}.$

Solución

a) $I = \displaystyle\int \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int f(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^2}{2},$

donde $f(x) = \ln x$.

Luego

$$I = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

b) Si $f(x) = \operatorname{tg} x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, por tanto,

$$\mathrm{I} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (f(x))^2}} \cdot f'(x)\, dx = \operatorname{arc\,sen}(f(x)).$$

Luego

$$I = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{tg} x) + C.$$

22.10. *Calcular*

a) $\displaystyle\int \frac{a^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$ *c)* $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^4} dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x \operatorname{sen}^2 (\ln x)} dx.$ *d)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(\ln x)^2 - 1}} \cdot \frac{1}{x} dx.$

Solución

a) Si $f(x) = \operatorname{tg} x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$, por tanto,

$$I = \int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{\operatorname{tg} x}}{\ln a} + C.$$

b) Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, de donde

$$I = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(f(x))} \cdot f'(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(f(x)) + C =$$

$$= -\operatorname{cotg}(\ln x) + C.$$

c) Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$, de donde

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + (x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x^2 + C.$$

d) Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$, por tanto

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(f(x))^2 - 1}} \cdot f'(x)\,dx = \ln[\sqrt{(f(x))^2 - 1} + f(x)] + C =$$

$$= \ln[\sqrt{(\ln x)^2 - 1} + \ln x] + C.$$

22.11. *Calcular* $I = \int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución

Integramos por partes

$$u = x \quad \text{de donde} \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\,dx \quad \text{de donde} \quad v = -\cos x.$$

Entonces

$$I = -x \cdot \cos x - \int (-\cos x)\,dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x.$$

La solución es

$$I = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

22.12. *Calcular* $I = \int \cos^3 x \, dx$

Solución

Integramos por partes

$$u = \cos^2 x \quad \text{de donde} \quad du = -2\cos x \operatorname{sen} x \, dx$$
$$dv = \cos x \, dx \quad \text{de donde} \quad v = \operatorname{sen} x.$$

Entonces

$$I = \operatorname{sen} x \cos^2 x - \int (-2) \cos x \operatorname{sen}^2 x \, dx =$$
$$= \operatorname{sen} x \cos^2 x + 2\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}.$$

La solución es

$$I = \operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + C.$$

22.13. *Calcular* $I = \int (4 + 3x + 2x^2)e^{-x} \, dx.$

Solución

Integramos por partes,

$$u = 4 + 3x + 2x^2 \quad \text{de donde} \quad du = (3 + 4x) \, dx$$
$$dv = e^{-x} \, dx \quad \text{de donde} \quad v = -e^{-x}.$$

Entonces,

$$I = -(4 + 3x + 2x^2)e^{-x} - \int -(3 + 4x)e^{-x}\,dx.$$

Sea $I_1 = \int (3 + 4x)\,e^{-x}\,dx$

$$u_1 = 3 + 4x \quad \text{de donde} \quad du_1 = 4\,dx$$
$$dv_1 = e^{-x}\,dx \quad \text{de donde} \quad v_1 = -e^{-x}$$

luego

$$I_1 = -(3 + 4x)e^{-x} - \int -4e^{-x}\,dx = -(3 + 4x)e^{-x} - 4e^{-x}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I &= -(4 + 3x + 2x^2)e^{-x} - (3 + 4x)e^{-x} - 4e^{-x} = \\ &= -(11 + 7x + 2x^2)e^{-x} \end{aligned}$$

y la solución es

$$I = -(11 + 7x + 2x^2)e^{-x} + C.$$

22.14. *Calcular* $I = \int x^3 e^{-x^2}\,dx.$

Solución

Integramos por partes,

$$u = x^2 \quad \text{de donde} \quad du = 2x\,dx$$

$$dv = x \cdot e^{-x^2}\,dx \quad \text{de donde} \quad v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$I = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \int \frac{2x}{2}e^{-x^2}\,dx$$

pero $I_1 = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, de donde

$$I = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}.$$

La solución es

$$I = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} + C.$$

22.15. *Calcular* $I = \int \ln x\,dx.$

Solución

Integramos por partes

$$u = \ln \quad \text{de donde} \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \quad \text{de donde} \quad v = x,$$

$$\text{luego } I = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x.$$

La solución es

$$I = x\ln x - x + C.$$

22.16. *Calcular* $I = \int e^x \cos x \, dx$.

Solución

Integramos por partes,

$$u = e^x \quad \text{de donde} \quad du = e^x \, dx$$
$$dv = \cos x \, dx \quad \text{de donde} \quad v = \operatorname{sen} x,$$

por tanto,

$$I = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot e^x \, dx.$$

Resolvemos ahora $I_1 = \int \operatorname{sen} x \cdot e^x \, dx$

$$u_1 = e^x \quad \text{de donde} \quad du_1 = e^x \, dx$$
$$dv_1 = \operatorname{sen} x \, dx \quad \text{de donde} \quad v_1 = -\cos x$$

luego,

$$I_1 = -e^x \cdot \cos x + \int \cos x \, e^x \, dx.$$

Resulta por tanto,

$$I = e^x \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x - I$$
$$2I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

de donde

$$I = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C.$$

22.17. *Calcular* $I = \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx.$

Solución

Integramos por partes

$$u = e^{-x} \quad \text{de donde} \quad du = -e^{-x}\,dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x\,dx \quad \text{de donde} \quad v = -\cos x$$

luego

$$I = -e^{-x}\cos x - \int \cos x \cdot e^{-x}\,dx.$$

De nuevo aplicamos el método a $I_1 = \int \cos x \cdot e^{-x}\,dx$

$$u_1 = e^{-x} \quad \text{de donde} \quad du_1 = -e^{-x}\,dx$$
$$dv_1 = \cos x\,dx \quad \text{de donde} \quad v_1 = \operatorname{sen} x$$

por tanto,

$$I_1 = \operatorname{sen} x \cdot e^{-x} + \int \operatorname{sen} x \cdot e^{-x}\,dx.$$

Luego

$$I = -e^{-x}\cos x - \operatorname{sen} x \cdot e^{-x} - I$$
$$2I = -e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)$$

de donde

$$I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x) + C.$$

22.18. *Calcular* $I = \int sen\,(ln\ x)\,dx.$

Solución

Apliquemos el método de integración por partes,

$$u = \operatorname{sen}(\ln x) \quad \text{de donde} \quad du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$$
$$dv = dx \quad \text{de donde} \quad v = x$$

por tanto,

$$I = x \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Hagamos lo mismo con $I_1 = \int \cos(\ln x)\,dx$

$$u_1 = \cos(\ln x) \quad \text{de donde} \quad du = -\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)\,dx$$
$$dv_1 = dx \quad \text{de donde} \quad v_1 = x$$

por tanto.

$$I_1 = x\cos(\ln x) + \int \frac{x}{x}\operatorname{sen}(\ln x)\,dx =$$
$$= x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx.$$

Luego,

$$I = x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$$
$$2I = x(\operatorname{sen}(ln\ x) - \cos(ln\ x)).$$

Por tanto, la solución es

$$I = \frac{1}{2}x(\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

22.19. *Calcular* $I = \int x\sqrt{9-x}\,dx.$

Solución

Integramos por partes:

$$u = x \quad \text{de donde} \quad du = dx$$

$$dv = \sqrt{9-x}\,dx = (9-x)^{1/2}\,dx \quad \text{de donde} \quad v = -\frac{2}{3}(9-x)^{3/2}$$

luego

$$I = -\frac{2}{3}x(9-x)^{3/2} + \int \frac{2}{3}(9-x)^{3/2}\,dx$$

y

$$I = -\frac{2}{3}x(9-x)^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(9-x)^{5/2}.$$

La solución es:

$$I = -\frac{2}{3}(9-x)^{3/2}\left[\frac{7x-18}{5}\right] + C.$$

22.20. *Calcular* $I = \int \text{arc tg}\, x\,dx.$

Solución

Integramos por partes

$$u = \operatorname{arc\,tg} x \quad \text{de donde} \quad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$dv = dx \quad \text{de donde} \quad v = x$$

luego,

$$I = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

La solución es:

$$I = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

22.21. *Calcular* $I = \int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

Solución

Integrando por partes se tiene,

$$u = \operatorname{arc\,tg} x \quad \text{de donde} \quad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$dv = x\,dx \quad \text{de donde} \quad v = \frac{1}{2}x^2$$

luego $I = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$

Sea la integral $I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$

$$= \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \operatorname{arc\,tg} x.$$

Por tanto

$$I = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arc\,tg} x) =$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x.$$

La solución es:

$$I = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

22.22. *Calcular* $I = \int (\ln x)^2\,dx.$

Solución

Integramos por partes,

$$u = (\ln x)^2 \quad \text{de donde} \quad du = \frac{2\ln x}{x}\,dx$$

$$dv = dx \quad \text{de donde} \quad v = x$$

luego

$$I = x(\ln x)^2 - 2\int \frac{x \ln x}{x}\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx$$

pero en el problema 22.15 hemos visto que

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C_1$$

por tanto

$$\begin{aligned} I &= x(\ln x)^2 - 2(x\,ln\,x - x) + C = \\ &= x[(\ln x)^2 - 2\ln x - 2] + C. \end{aligned}$$

22.23. *Calcular* $I = \int \frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2}\,dx.$

Solución

Por ser el polinomio del numerador de mayor grado que el del denominador, dividimos

$$\frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2} = x + \frac{1}{1 + x^2}$$

luego

$$I = \int x\,dx + \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \operatorname{arc\,tg} x.$$

La solución es

$$I = \frac{x^2}{2} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

22.24. *Calcular* $I = \int \frac{9x}{(x-4)(x^2+2)} dx.$

Solución

Descomponemos en fracciones simples.

$$\frac{9x}{(x-4)(x^2+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2+2} =$$

$$= \frac{A(x^2+2) + (x-4)(Bx+C)}{(x-4)(x^2+2)}$$

y obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 0 \\ C - 4B = 9 \\ 2A - 4C = 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $A = 2$, $B = -2$ y $C = 1$.

Luego

$$I = \int \frac{2}{x-4} dx + \int \frac{-2x+1}{x^2+2} dx = 2 \ln (x-4) +$$

$$+ \int \frac{-2x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2} dx =$$

$$= 2 \ln (x-4) - \ln (x^2+2) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= 2 \ln (x-4) - \ln (x^2+2) + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

La solución es

$$I = \ln \frac{(x-4)^2}{x^2+2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

22.25. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.

Solución

Hallando las raíces del denominador se tiene

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}.$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{(A+B)x + (-3A - 2B)}{(x-2)(x-3)}$$

y obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -3A - 2B &= 1 \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es $A = -1$ y $B = 1$. Entonces,

$$I = -\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln(x-3) - \ln(x-2) =$$

$$= \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right).$$

La solución es:

$$I = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + C.$$

22.26. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+5x+6}$.

Solución

Por ser el polinomio del numerador de mayor grado que el del denominador, dividimos

$$\frac{x^3+1}{x^2+5x+6} = x - 5 + \frac{19x+31}{x^2+5x+6}$$

luego,

$$I = \int x\,dx - 5\int dx + \int \frac{19x+31}{x^2+5x+6}\,dx.$$

Calculemos $I_1 = \displaystyle\int \frac{19x+31}{x^2+5x+6}\,dx$,

descomponemos en fracciones simples

$$\frac{19x+31}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

y obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 19 \\ 3A + 2B &= 31 \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es $A = -7$ y $B = 26$, luego

$$I_1 = \int \frac{-7}{x+2}\,dx + \int \frac{26}{x+3}\,dx = -7\ln(x+2) + 26\ln(x+3).$$

Por tanto la solución es

$$I = \frac{x^2}{2} - 5x + \ln\frac{(x+3)^{26}}{(x+2)^7} + C.$$

22.27. *Calcular* $I = \int \frac{x+2}{x^3 - x}\,dx.$

Solución

El denominador se descompone en la forma

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$$

y

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x}.$$

Operando, se tiene:

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)x} = \frac{A(x-1)x + B(x+1)x + C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)x} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (B-A)x - C}{(x+1)(x-1)x}$$

luego

$$x + 2 = (A+B+C)x^2 + (B-A)x - C$$

de donde se obtiene el sistema

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ B - A &= 1 \\ -C &= 2 \end{aligned}\right\}$$

que tiene por soluciones $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ y $C = -2$.

Por tanto,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{3}{2}\ln(x-1) - 2\ln x.$$

La solución es:

$$I = \ln\left(\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}{x^2}\right) + C.$$

22.28. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\,dx.$

Solución

Aunque el cálculo de esta primitiva puede hacerse por descomposición en fracciones simples, lo vamos a resolver por otros medios. En general siempre hay diversos métodos de resolución.

Intentemos en I obtener la derivada del denominador en el numerador.

$$I = \int \frac{x+1-1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{-1}{x^2+2x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{-1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx.$$

En la integral $I_1 = \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$ se completan cuadrados:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+2x+1+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C_1.$$

Por tanto

$$I = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C.$$

22.29. *Calcular* $I = \int \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+1}dx.$

Solución

Por ser el polinomio del numerador de mayor grado que el del denominador, dividimos,

$$\frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+1} = x+1+\frac{1-2x}{x^2+1}$$

luego,

$$I = \int \left(x + 1 + \frac{1 - 2x}{x^2 + 1} \right) dx = \int x\, dx + \int dx +$$

$$+ \int \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \operatorname{arc\,tg} x - \ln (x^2 + 1).$$

La solución es

$$I = \frac{x^2}{2} + x + \operatorname{arc\,tg} x - \ln (x^2 + 1) + C.$$

22.30. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{x^3 - 3x + 3}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} dx.$

Solución

Calculamos las raíces del denominador resultando

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x^2 + 1)(x - 2)^2$$

y

$$\frac{x^3 - 3x + 3}{(x^2 + 1)(x - 2)^2} = \frac{A}{(x - 2)^2} + \frac{B}{x - 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

de donde

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 3 &= A(x^2 + 1) + B(x - 2)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 2)^2 = \\ &= (B + C)x^3 + (A - 2B - 4C + D)x^2 + \\ &+ (B + 4C - 4D)x + (A - 2B + 4D). \end{aligned}$$

Igualando coeficientes y resolviendo el sistema resultan las siguientes soluciones

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 1.$$

Por tanto

$$I = \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x-2} + \ln(x-2) + \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

22.31. *Calcular*

a) $I = \int sen^2 x\,dx.$

b) $I = \int cos^2 x\,dx.$

Solución

a) Utilizamos la siguiente igualdad

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

entonces

$$I = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

La solución es

$$I = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C.$$

b) Utilizamos que

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

luego

$$I = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C.$$

Nota: Estas integrales son de gran utilidad en el cálculo de primitivas de funciones trigonométricas.

22.32. *Calcular*

a) $I = \int sen^5\, x\, dx.$

b) $I = \int sen^3\, x \cos^3\, x\, dx.$

Solución

a) $I = \int \operatorname{sen} x\, (\operatorname{sen} x)^4\, dx = \int \operatorname{sen} x\, (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx =$

$$= \int \operatorname{sen} x\, (1 - \cos^2 x)^2\, dx =$$

$$= \int \operatorname{sen} x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\, dx =$$

$$= \int \operatorname{sen} x\, dx - 2\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx + \int \operatorname{sen} x \cos^4 x\, dx =$$

$$= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

b) $I = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^3 x\, dx =$

$$= \int \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) \cos^3 x\, dx =$$

$$= \int \operatorname{sen} x \cos^3 x\, dx - \int \operatorname{sen} x \cos^5 x\, dx =$$

$$= -\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

22.33. *Calcular* $I = \int sen^4\, x\, cos^4\, x\, dx.$

Solución

$$I = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 (\cos^2 x)^2\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - \cos^2 2x)^2\, dx = \frac{1}{16}\int (\operatorname{sen}^2 2x)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{64} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{64} \left[\int dx - 2 \int \cos 4x\, dx + \int \cos^2 4x\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{64} \left[x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x + \int \frac{1 + \cos 8x}{2}\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{64} \left[x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 8x \right] =$$

$$= \frac{1}{64} \left[\frac{3}{2} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 8x \right].$$

Por tanto, la solución es

$$I = \frac{1}{64} \left[\frac{3}{2} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 8x \right] + C.$$

22.34. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

Solución

Hacemos el cambio general

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \text{de donde} \quad x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$$

y

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Calculemos $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en función de t:

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Sustituyendo se tiene:

$$I = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int\frac{2}{-t^2+2t+1}\,dt =$$

$$= -2\int\frac{1}{t^2-2t+1}\,dx = -2\int\frac{1}{(t-1)^2}\,dt = 2\cdot\frac{1}{t-1}.$$

Luego la solución es

$$I = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1} + C.$$

22.35. *Calcular* $I = \int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx.$

Solución

$$I = \int \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx =$$

$$= \int \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx - 2\int \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= 2\cos x + \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx.$$

Sea $I_1 = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx$. Hacemos el cambio

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \text{de donde} \quad dx = \frac{2}{1 + t^2}\, dt$$

y

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Luego $I_1 = \int \frac{\frac{2}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln t$

es decir $I_1 = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Por tanto, la solución es

$$I = 2\cos x + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

22.36. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x - 1}\,dx.$

Solución

Como el integrando es impar en $\operatorname{sen} x$, hacemos el cambio $t = \cos x$ de donde $dt = -\operatorname{sen} x\,dx$, y se tiene:

$$I = -\int \frac{1}{t^3 - 1}\,dt.$$

La descomposición $\dfrac{1}{t^3 - 1} = \dfrac{A}{t - 1} + \dfrac{Bt + C}{t^2 + t + 1}$ tiene por soluciones $A = \dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{1}{3}$ y $C = -\dfrac{2}{3}$.

Por tanto,

$$I = -\int \frac{\frac{1}{3}}{t - 1}\,dt - \int \frac{-\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}}{t^2 + t + 1}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(t - 1) + \frac{1}{3}\int \frac{t + 2}{t^2 + t + 1}\,dt.$$

Calculemos ahora $I_1 = \displaystyle\int \frac{t + 2}{t^2 + t + 1}\,dt$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2t + 4}{t^2 + t + 1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2 + t + 1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Por tanto, la solución es:

$$I = -\frac{1}{3}\ln(\cos x - 1) + \frac{1}{6}\ln(\cos^2 x + \cos x + 1) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

22.37. *Calcular* $I = \int tg^2 x \, dx$.

Solución

Como el integrando es par en $\cos x$ y en $\operatorname{sen} x$, se hace el siguiente cambio $\operatorname{tg} x = t$ de donde $dx = \dfrac{1}{1+t^2} dt$.

Luego

$$I = \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt = t - \operatorname{arc\,tg} t.$$

Por tanto la solución es

$$I = \operatorname{tg} x - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) + C = \operatorname{tg} x - x + C.$$

22.38. *Calcular* $I = \int \cos x \operatorname{sen} 5x \, dx$.

Solución

Utilizamos las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen}(ax + bx) = \operatorname{sen} ax \cos bx + \cos ax \operatorname{sen} bx$$
$$\operatorname{sen}(ax - bx) = \operatorname{sen} ax \cos bx - \cos ax \operatorname{sen} bx$$

que para el caso $a = 5$ y $b = 1$ resulta

$$\operatorname{sen}(5x + x) = \operatorname{sen} 5x \cos x + \cos 5x \operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{sen}(5x - x) = \operatorname{sen} 5x \cos x - \cos 5x \operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 5x \cos x.$$

Luego

$$I = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 6x\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 4x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 4x.$$

Por tanto la solución es:

$$I = -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.$$

22.39. *Calcular* $I = \int \cos 3x \cos 5x\,dx.$

Solución

Utilizamos las siguientes fórmulas:

$$\cos(ax + bx) = \cos ax \cos bx - \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx$$
$$\cos(ax - bx) = \cos ax \cos bx + \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx$$

que para el caso $a = 5$ y $b = 3$ resulta

$$\cos(5x + 3x) = \cos 5x \cos 3x - \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x$$
$$\cos(5x - 3x) = \cos 5x \cos 3x + \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x$$

sumando,

$$\cos 8x + \cos 2x = 2\cos 5x \cos 3x.$$

Luego

$$I = \frac{1}{2}\int (\cos 8x + \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

La solución es

$$I = \frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

22.40. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

Solución

Como la función del integrando es par en $\cos x$, se hace el cambio $\operatorname{tg} x = t$, o sea $x = \operatorname{arc\,tg} t$, de donde

$$dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Por tanto,

$$I = \int \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^6}\cdot\frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{(1+t^2)^3}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int (1+t^2)^2\, dt = \int (1 + 2t^2 + t^4)\, dt =$$

$$= t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5.$$

La solución es

$$I = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

22.41. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[4]{x-1}}\,dx.$

Solución

Hacemos el cambio $x - 1 = t^4$, de donde $dx = 4t^3\,dt$.

Luego,

$$I = \int \frac{\sqrt{t^4}}{1+\sqrt[4]{t^4}} \cdot 4t^3\,dt = \int \frac{t^2}{1+t} \cdot 4t^3\,dt =$$

$$= 4\int \frac{t^5}{1+t}\,dt = 4\int \left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 4\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1)\right).$$

La solución es

$$I = 4\left[\frac{(x-1)^{5/4}}{5} - \frac{(x-1)^{4/4}}{4} + \frac{(x-1)^{3/4}}{3} - \frac{(x-1)^{2/4}}{2} + \right.$$

$$\left. + (x-1)^{1/4} - \ln((x-1)^{1/4} - 1)\right] =$$

$$= 4\left[\frac{(x-1)^{5/4}}{5} - \frac{x-1}{4} + \frac{(x-1)^{3/4}}{3} - \frac{(x-1)^{1/2}}{2} + \right.$$

$$\left. + (x-1)^{1/4} - \ln((x-1)^{1/4} - 1)\right] + C.$$

22.42. *Calcular* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x - x^2}}$.

Solución

Completamos cuadrados en la función subradicando,

$$\frac{1}{\sqrt{2 - 2x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3 - (x^2 + 2x + 1)}} = \frac{1}{\sqrt{3 - (x + 1)^2}}.$$

Luego

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{3 - (x + 1)^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\, dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

La solución es

$$I = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

22.43. *Calcular* $I = \int \frac{dx}{(3 + x)\sqrt{1 + x}}$.

Solución

Hacemos el cambio $1 + x = t^2$, de donde $x = t^2 - 1$ y $dx = 2t\, dt$.

Por tanto,

$$I = \int \frac{1}{(t^2+2)\sqrt{t^2}} \cdot 2t\,dt = \int \frac{2t}{(t^2+2)t}\,dt =$$

$$= \int \frac{2}{t^2+2}\,dt = \int \frac{2}{2\left(1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Luego la solución es

$$I = \sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{\frac{1+x}{2}} + C.$$

ISBN 84-362-2473-6

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA